

神様に払う謝礼 — エントロピー閑話 1

偏りのない1個の銅貨を投げるとその結果は表か裏のどちらかである。これが何であるかを知った時に得られる「情報量」はいったいいくらであると考えればよいであろうか。同様に、偏りのない1個のサイコロを投げて1から6までのどの目が出たかを教えてもらうといくらの「情報量」が得られたとすればよいのであろうか。また、これらの情報量を測るための「ものさし」はいったいどのように定めればよいであろうか。その際、サイコロのほうが銅貨のほうにくらべて起こりうる場合の数が大きいので、情報量もより大きくなって欲しい。

そこで、森羅万象をつかさどる全知前能の神にご登場ねがってみよう。この神様は必要な情報をその「情報量に」比例した金額の謝礼と交換に提供してくれる。第1案として、まず、場合の数に比例した謝礼を考えてみよう。銅貨の場合には2円、サイコロの場合には6円である。この謝礼の特徴を知るために、銅貨投げを独立に2回実行したとしよう。その結果は1回目と2回目を組にして表すと、(表、表)、(表、裏)、(裏、表)、(裏、裏)の4つの場合に分かれる。したがって、このうちいずれであるかを知るために払うべき謝礼は4円ということになる。一方、1回目と2回目の結果を別々に教えてもらってそれを合わせても同じ情報が得られるが、この場合には、謝礼を別々に払うことになる。その合計は2円+2円=4円となり、つじつまはちゃんと合っている。ところが、同様のことをサイコロについて考えると奇妙なことが起こってしまう。というのは、1回目と2回目のサイコロの目をくみにして表すとその結果は (i,j) ($i,j=1,\dots,6$) という36個の場合にわかれるので、そのうちいずれであるかを知るためには36円の謝礼を払わなければならない。ところが、1回目と2回目の結果を別々におしえてもらうようにすると謝礼は合計で6円+6円=12円で済んでしまうのである。同一の情報を入手するのに、そのやり方の違いで謝礼の額が異なってしまうというのでは神への信仰も揺らぎかねない。そこで、賢明なる神様の考えた第2案は、起こりうる場合の数を W としたときの謝礼 S を

$$S = \log_2 W$$

にするというものであった。(ハートレイの情報量)。ついでに、謝礼の単位を俗界のちりにまみれた「円」から「ビット(bit)」という神聖通貨に改め人心を一新することにした。この方式によれば、2回分の情報に対する謝礼を別々に払うか一度に払うかに関係なくどちらも、銅貨投げの場合には $2 \log_2 2 (= \log_2 4)$ ビット、サイコロ投げの場合には $2 \log_2 2 (= \log_2 36)$ ビットになる。かくして、一件落着相なったというしだいである。

それでは、銅貨やサイコロに偏りがある場合にはどのように考えればよいであろうか。例えば、表と裏がそれぞれ0.9と0.1の確率で出るような銅貨では、だいたい表がでると見当がつくので、結果を知るために必要な情報量は少なくなるのであろう。もっと極端な場合として表ばかり出る銅貨を考えると、神様にお世話になる必要はまったくなくなる。したがって、謝礼も払う必要がまったくない。すなわち、銅貨に偏りがあるときには、神様に払うべき謝礼は1回当たり $\log_2 2$ ビットより少なくなるはずである。