

赤と黒 — エントロピー閑話 2

全部で N 個の座席をもつ A 劇場に N_1 人の女性と N_2 人の男性が招待された ($N_1 + N_2 = N$)。すべての座席には 1 から N までの通し番号がふってある。劇場主の趣味によって、招待客全員が用意された同形の仮面をかぶることを義務づけられ、女性には赤の仮面、男性には黒の仮面が配られた。招待客全員が着席すると、客席全体が赤と黒の織りなす華麗なるあるパターンをつくり出す。劇場主はこの座席パターンを舞台と一体化させ劇場全体にわたる壮大なドラマの展開を夢みたのである。それでは、このようなパターンの総数 W はいくらであろうか。答えは $W = N! / N_1! N_2!$ であるから、招待客がその日に実際につくり出したパターンを劇場主が知るために必要な情報量は

$$S = \log_2 W = \log_2 \frac{N!}{N_1! N_2!}$$

となる。 N_1, N_2 が十分大きいとし、 $p_1 = N_1 / N$ (赤の割合)、 $p_2 = N_2 / N$ (黒の割合) とおいてスターリングの公式を用いれば

$$S \simeq NH(p_1, p_2)$$

が得られる。ただし、 $H(p_1, p_2) = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2$ は (p_1, p_2) を確率分布とみなしたときの**エントロピー**である (シャノンの情報量)。ここで、ある特定の座席に注目し、その座席に座る仮面の色が赤であるか、黒であるかだけを知るために必要な情報量 S_N を考えると、 S_N は上の S を座席の総数 N でわって

$$S_N \simeq H(p_1, p_2)$$

となる。したがって、起こりやすさに偏りのある一般の場合の情報量は $H(p_1, p_2)$ ビットであると考えべきである。まさしくこれが偏りのある場合には神様に払うべき謝礼なのであった。 $H(p_1, p_2) \leq \log_2 2$ が成り立つので、謝礼の額はどんな場合にも $\log_2 2$ ビットを超えない。 $\log_2 2$ ビットを用意しておきさえすれば、神様は公平であるから情報量を正確に計算しておつりを返してくれる。おつりが返ってこないのは、 $p_1 = p_2 = 1/2$ すなわち偏りのない場合に限るのである。

以上のことは、座席の赤と黒をそれぞれ銅貨の表と裏と読み換えれば、銅貨投げ (一 神様に払う謝礼：エントロピー閑話 1) の情報量を一般化したことになっている。また、仮面の色の種類が 2 より大きい場合にも容易に拡張できる。

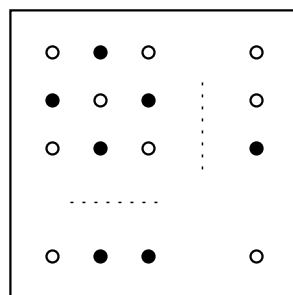


図 1: A 劇場の座席パターン