

マクロとミクロ — エントロピー閑話 3

さて、招待客全員が着席するとドラマを開演できる。劇場主の関心が開演できるかどうかだけにあるとすれば、全員が着席しているという事態は、その座り方のパターンがどうであれ、同一のある状態を指定していることになる。このような状態のことをマクロ状態と言うことにしよう。これに対して、座り方の個々のパターンはミクロ状態と呼ばれる。1つのマクロ状態を実現するミクロ状態はいく通りもあるが、そのようなミクロ状態の総数を W とするとき、 $S = \log_2 W$ をそのマクロ状態のエントロピーと呼ぼう（ボルツマン（L.Boltzmann））。この量はすでに定義した情報量（― 神様に払う謝礼；エントロピー閑話 1）と同種のものであるが、物理学ではマクロ状態の秩序の度合いを表していると解釈することになる。このエントロピーが大きくなればその分だけ秩序を失ったと考えればよい。しかし、なぜそう考えることができるのか。劇場主に語らせてみよう。

劇場主はドラマ上演用の A 劇場のほかにもう 1 つコンサート用の B 劇場も所有しているが、両劇場は実はただ 1 枚の壁によって隔てられているだけである。B 劇場の座席数は M で、 M_1 人の女性客と M_2 人の男性客が招待される（ $M_1 + M_2 = M$ ）。女性は赤、男性は黒の仮面を

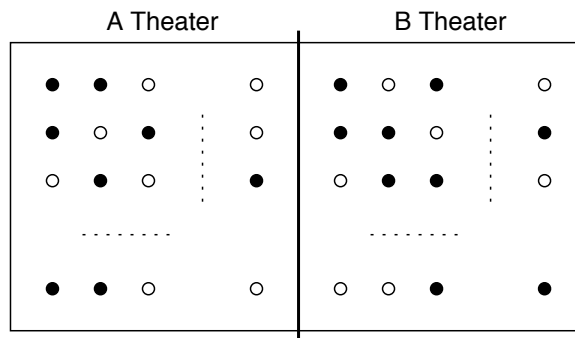


図 1: A 劇場と B 劇場

かぶって着席するのがマナーであるのは A 劇場の場合と同じである。意欲旺盛なこの劇場主は最近 2 つの劇場の間の壁を取り除いてまったく新しい総合芸術上演のための大劇場つくことを思いついた。その際、いままで A 劇場、B 劇場と別々に招待されていた N 人と M 人の客は、新しくつくられる大劇場（C 劇場とよぶ）の $N + M$ 個の座席のいずれにも自由に座ることができる。すると、おのこの招待客が自分の座席を選択する自由度が増すので、全体としての座り方の秩序が失われるとすればよいのだろうか。A 劇場での座席パターンの総数が $n = N!/N_1!N_2!$ であることはすでに述べた。（― 赤と黒；エントロピー閑話 2）同様に、B 劇場での座席パターンの総数は $m = M!/M_1!M_2!$ であるから、A 劇場と B 劇場に分かれているときの全体としての座席パターンの総数は nm となる。したがって、両劇場を合わせたマクロ状態のエントロピー S_{AB} は

$$S_{AB} = \log_2(nm)$$

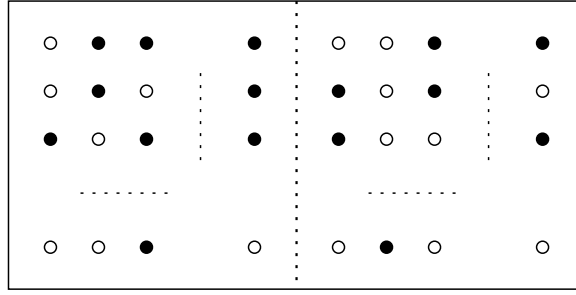


図 2: C 劇場

$$\simeq NH(p_1, p_2) + MH(q_1, q_2)$$

で与えられる。ただし、 $q_1 = M_1/M$ 、 $q_2 = M_2/M$ 、とした。一方、C劇場での座席パターンの総数は $l = (N + M)!/(N_1 + M_1)!(N_2 + M_2)!$ だから、C劇場のマクロ状態のエントロピー S_c は

$$S_C = \log_2 l \simeq (N + M)H(r_1, r_2)$$

である。ここで、 $r_1 = (Np_1 + Mq_1)/(N + M)$ 、 $r_2 = (Np_2 + Mq_2)/(N + M)$ である。したがって、エントロピーの変化分は

$$S_C - S_{AB} = (N + M)H(r_1, r_2) - NH(p_1, p_2) + MH(q_1, q_2)$$

となるが、右辺は常に正であることが証明されるので $S_C - S_{AB} > 0$ (エントロピーの凸性)。よって、マクロ状態のエントロピーは増加する。

ところで、個々の招待客に座席を指定するというめんどうなことはしないというのが劇場主の信条であったので、いったん壁を取り除いた後にできた座席パターンがそれ以前にあった座席パターンのどれか1つに「自然に」戻るといふことほとんど起こり得ない。この意味で、劇場間の壁を取りのぞくという操作は一種の「不可逆過程」である。不可逆過程では必ずある種の秩序が失われる。この「秩序の減少分」が上で計算したエントロピーの増加分 $S_C - S_{AB}$ にほかならない (エントロピー増大の法則)。実は、マクロ状態を変量とするすべての物理現象が本質的にはまったく同じ法則に従うのである。歴史的にみれば、エントロピー概念は、もともと熱力学の研究に携わっていたカルノー (S.Carnot)、クラウジウス (R.J.E.Clausius)、ボルツマンらによって確立され、その後の統計力学の建設を刺激した基本概念であった。シャノンは自らが定義した情報量を命名するのに、フォン・ノイマン (J.von Neumann) の助言を得てエントロピーという用語を熱力学から借用したといわれている。物理学と情報理論は、誕生の経緯や時代背景をおおいに異にしながらも、根本においては共通の指導原理に立脚して成立しているのである。神の摂理とでもいうべきであろうか。