

確率論の基礎

ogawa@is.uec.ac.jp

- 担当 : 小川 朋宏 (IS棟 8F)
<http://www.guest.is.uec.ac.jp/ogawa/>
- 内容 :
 - 1. 確率空間
 - 2. 確率変数
 - 3. 大数の法則
- 目標 :
 - 確率論の基礎を学ぶ
 - 必要であれば、さらに進んだ内容の教科書を読む力を付ける
- 参考文献 :
 - 尾関和彦, 情報技術のための離散数学入門, 共立出版, 2004.
 - 伏見正則, 確率と確率過程, 朝倉書店, 2004.
 - 熊谷隆, 確率論, 共立出版, 2003.
 - 佐藤坦, はじめての確率論 測度から確率へ, 共立出版, 1994.
- 記法
 - Def (Definition) 定義
 - Lem (Lemma) 補題
 - Thm (Theorem) 定理
 - $\mathbb{R}$ 実数の集合 (~~set~~ set of real numbers)

1. 確率空間 (probability space)

1-1. 標本空間と事象

○ 標本空間 (sample space)

Ω : 対象となる偶然現象の
結果全体の集合

(特にことわらない限り有限集合とする)

○ 事象 (event)

$A \subset \Omega$: 結果について興味のあることばら

例

さいころを振る (dice)

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 3, 5\}$ 目が奇数 (odd)
となる事象

$B = \{1, 2, 3\}$ 目が3以下の事象

事象の
演算

$A \cap B = \{1, 3\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

$A^c = \{2, 4, 6\}$

$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

1の確率 3の確率 5の確率

//

◦ $\mathcal{F} := 2^\Omega$ 事象全体の集合

$$A \subset \Omega \iff A \in \mathcal{F} \quad \text{注意}$$

◦ 全事象 $\Omega \in \mathcal{F} (\iff \Omega \subset \Omega)$

◦ 空事象 $\emptyset \in \mathcal{F} (\iff \emptyset \subset \Omega)$

◦ 事象の演算

$$A, B \in \mathcal{F} \text{ に対して}$$

□ 和事象 (sum event) $A \cup B \in \mathcal{F}$

□ 積事象 (product event) $A \cap B \in \mathcal{F}$

□ 余事象 (complementary event) $A^c \in \mathcal{F}$

◦ 有限事象 $\{\omega\} \subset \Omega \quad (\omega \in \Omega)$

Def (互いに素)

$$A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega \text{ が互いに素}$$

def
 $\iff$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \left(\begin{array}{l} i \neq j \\ i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array} \right) //$$

1-2. 確率測度 (probability measure)

確率測度の公理

* Def $\Omega, \mathcal{F} = 2^\Omega$ (つまり

写像 $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ が以下を満たすとき

Ω 上の確率測度 という

$$(1) \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(A) \geq 0$$

$$(2) \quad P(\Omega) = 1$$

(3) $A, B \in \mathcal{F}$ が互いに素ならば

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

0 のとき $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は 確率空間 という

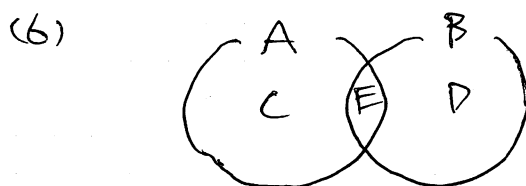
Lem (確率測度の性質)

レポート

- (1) $\forall A \subset \Omega$,
 $P(A) + P(A^c) = 1$
- (2) $\forall A \subset \Omega$, $0 \leq P(A) \leq 1$
- (3) $P(\emptyset) = 0$
- (4) $\forall A, \forall B \subset \Omega$
 $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- (5) $\forall A_1, \forall A_2, \dots, \forall A_n \subset \Omega$ に対して,
 $A_1, \dots, A_n$ が互いに素ならば
 $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ (有限加法性)
- (6) $\forall A, \forall B \subset \Omega$,
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

⑤ 証明

- (1) $\Omega = A \cup A^c$, A と A^c は互いに素
- (2) $P(A) \leq 1$ を示す.
(1) と $P(A^c) \geq 0$ (公理 4) より
- (3) $\emptyset = \Omega^c$ と公理 (2)
- (4) $B = A \cup (B \setminus A)$, A と $B \setminus A$ は互いに素
- (5) 公理 (3) より 帰納法で示す



$$\begin{aligned} C &= A \setminus B \\ D &= B \setminus A \\ E &= A \cap B \end{aligned}$$

C, D, E は互いに素
(5) を用いる

Lem

Ω が有限集合のとき
確率測度の公理は以下と同等

- (1) $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) \geq 0$
- (2) $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$
- (3) $\forall A \subset \Omega, (A \in \mathcal{F} = 2^\Omega)$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

証明略 (明らか)

○ 有限 (可算) 集合 Ω を標本空間として考える場合, 確率 (測度) は根元事象に

□ 「(1) 0以上 (2) 全部をすと1」

となる重みを与えてもOK

□ 事象の確率は含まれる根元事象の和
($A \subset \Omega$)

[例] 公平なコインを n 回投げる

○ 確率空間

表 = 1, 裏 = 0

□ 標本空間 $\Omega = \{0, 1\}^n$

$$= \{ \omega = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\} \text{ (} i=1, 2, \dots, n \text{)} \}$$

□ 確率測度は

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{2^n} \quad (\omega \in \Omega)$$

により定まる

○ k 回目表となる事象 ($k=1, 2, \dots, n$)

$$A_k = \{ \omega = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_k = 1 \}$$

$$P(A_k) = \sum_{w \in A_k} \underbrace{P(\{w\})}_{1/2^n} = \frac{|A_k|}{2^n} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$$A_k \cap A_l \quad (k \neq l) \\ = \{w = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_k = 1 \wedge x_l = 1\}$$

$$P(A_k \cap A_l) \\ = \sum_{w \in A_k \cap A_l} P(\{w\}) = \frac{|A_k \cap A_l|}{2^n} = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$$

1-3. 条件付き確率 (conditional probability)

Def $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\mathbb{R}^{2^n}$ 確率空間とする

$A \subset \Omega$, $P(A) \neq 0$ に対して

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (B \in \mathcal{F})$$

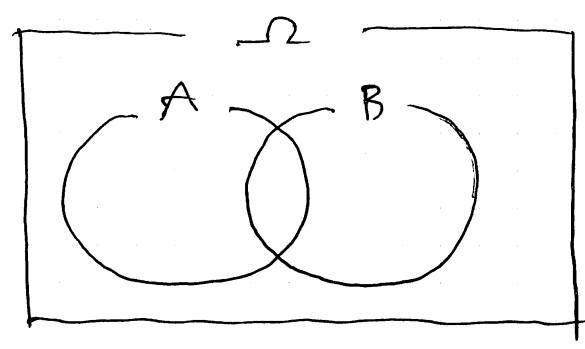
$\mathbb{R}^{2^n}$

条件付き確率 という

Thm $A \subset \Omega$ ($P(A) \neq 0$) を固定すると

$$\begin{array}{ccc} \text{写像} & P(\cdot|A) : \mathcal{F} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \downarrow & \downarrow \\ & B & \longmapsto P(B|A) \end{array}$$

は Ω 上の確率測度 (証明はレポート)



A の確率が 1 になるように「規格化」して $A \cap B$ の確率を測いたもの

例

子供が2人いる家族に合ったとき

男の子がいることが分かった。

男の子がもう一人いる確率を求めよ。

ただし、男の子と女の子が生まれる確率はともに $\frac{1}{2}$ とする。

- 標本空間

$$\Omega = \{bb, bg, gb, gg\}$$

b: boy g: girl

- 確率測度

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{4} \quad (\omega \in \Omega)$$

- 男の子が1人いる事象

$$A = \{bb, bg, gb\}$$

- 男の子が2人いる事象

$$B = \{bb\}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

//

Lem (Chain rule)

- $P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$ ($\because$ 条件付き確率の定義)

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A \cap B) P(C|A \cap B) \\ &= P(A) P(B|A) P(C|A \cap B) \end{aligned}$$

~~同様~~ 同様にして

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \prod_{i=2}^n P(A_i | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{i-1})$$

1-4. ベイズの公式 (Bayes' rule)

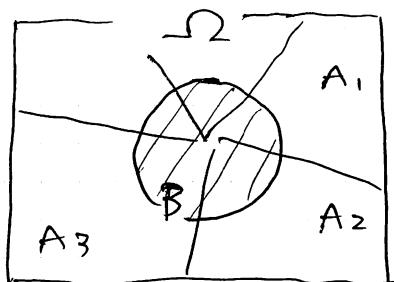
Thm (全確率の公式)

$A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ が互いに素で、

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{のとき}$$

$$\forall B \subset \Omega, \quad P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B)$$

(証明)



$$B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)$$

で $(A_i \cap B)$ は互いに素

なので有限加法性を用い、おぼし

用い、おぼし

//

Thm (ベイズの公式)

$A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ が互いに素で、

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{のとき}$$

$\forall B \subset \Omega$ (= 対して $P(B) \neq 0$ ならば)

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(B | A_i)} \quad (i=1, \dots, n)$$

(証明)

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_i \cap B)}{\sum_{i=1}^n P(A_i \cap B)} \quad (\text{全確率の公式})$$

$$= \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(B | A_i)} \quad (\text{chain rule})$$

//

1-5. 独立性 (independence)

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が与えられたときDef 事象 $A, B \subset \Omega$ が独立def
 $\Leftrightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Lem $P(A) \neq 0$
のとき事象 A, B が独立

$$\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

⊙

$$A, B \text{ が独立} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

||

$$P(A)P(B|A)$$

$$\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

$$\text{if } P(A) \neq 0 //$$

3つ以上

Def (複数の事象の独立性)事象 $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ が独立def
 $\Leftrightarrow$

$$\textcircled{*} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n \text{ とする}$$

$$\text{すべし } i_1, i_2, \dots, i_m \text{ について}$$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^m A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^m P(A_{i_k})$$