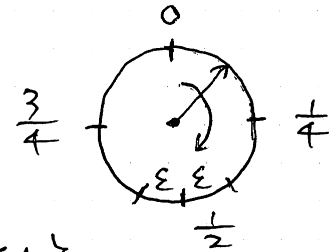
1-6. 確率空間の公理について

○なぜ難しい定義をするのか？ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

① 根元事象 $(\omega \in \Omega)$ に確率を割り当てる定義ではダメ？

② なぜ 2^{Ω} ではなく $\mathcal{F}$ とするのか？

$\boxed{例}$ ルーレット



- 標本空間

$$\Omega = [0, 1)$$
$$= \{\omega \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \omega < 1\}$$

- ルーレットの針が止まる位置が「ランダム」のとき

□ $P([0, \frac{1}{2}]) = \frac{1}{2}$

□ $P([0, \frac{1}{4}]) = \frac{1}{4}$ 　としたい

- 針が 0.5 を指す確率は？

$$P([\tfrac{1}{2} - \varepsilon, \tfrac{1}{2} + \varepsilon]) = 2\varepsilon$$
$$\downarrow \quad \varepsilon \to 0$$
$$P(\{0.5\}) = 0$$

- 同様にすべての根元事象の確率は 0
すなわち、 $\forall \omega \in \Omega, \ P(\{\omega\}) = 0$

⇝ ①の考え方はうまくいかない

（参考文献：
竹村彰通，数理統計学，創文社，1991.）

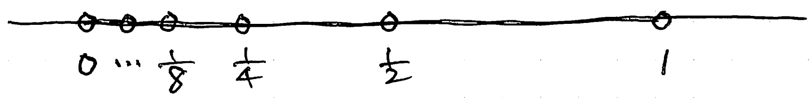
○「事象Aの確率＝Aの長さの総和」
としたい

□ $A = [0, \frac{1}{4}) \cup [\frac{3}{4}, 1) \subset \Omega$

$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

□ $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left((\frac{1}{2})^{k+1}, (\frac{1}{2})^{k} \right)$

$= (\frac{1}{2}, 1) \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \cup \cdots$



$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{k+1}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$

○ しかし，A⊂Ωで長さを測れない部分集合が存在

measure theory 測度論

□ A⊂Ωが長さを測れる：ルベーグ可測

□ A⊂Ωが長さを測れない：ルベーグ非可測

○ ルーレットの例では

2^{Ω} の要素全部を事象とするのは不都合

⇓

$\mathcal{F} := \{A \subset \Omega \mid$ Aは長さを測れる (ルベーグ可測) $\} \subsetneq \Omega$

として $\mathcal{F}$ の要素のみを事象とよぶ ← ②

○ $\mathcal{F}$ は以下をみたす

$$(*)\begin{cases} (1) & \Omega \in \mathcal{F} \\ (2) & A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \\ (3) & A_i \in \mathcal{F}\,(i=1,2,\cdots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \end{cases}$$

さらに (1)〜(3) を用いると以下が成立

(4) $\phi \in \mathcal{F}$

(5) $A_i \in \mathcal{F}\,(i=1,2,\cdots) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

1-7. 一般の確率空間

以降 Ω が有限とは限らない

○ <u>Def</u> σ-代数 (σ-algebra)
(σ-集合体)

集合 Ω に対して, $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ が <u>σ-代数</u>

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{F}$ が (*) をみたす.

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ が (1)〜(5) をみたす

すなわち、

σ-代数 = 「$\cup$, $\cap$, ^{c}」で閉じていて
(集合演算)
(closed)

Ω, ϕ を含む

<u>Remark</u> σ : 可算無限

○ <u>Def</u> （確率測度）　一般の場合

Ω : 集合

$\mathcal{F}$: σ-代数 $(\mathcal{F} \subset 2^{\Omega})$

が与えられたとき

写像（関数）　$P : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$　が以下をみたすとき

P を<u>確率測度</u>とよぶ

(1)　$\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A) \geq 0$

(2)　$P(\Omega) = 1$

(3)　$A_i \in \mathcal{F} (i = 1, 2, \cdots)$ が互いに素ならば

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (\sigma\text{-加法性})$$

$\updownarrow$

有限加法性

このとき　<u>$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間</u>とよぶ

<u>Remark</u>

○　4ページの Lem (1)〜(6) が同様に成立

○　さらに以下も成立

□　$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ のとき

$$P\left(\lim_{n \to \infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

ただし，$\displaystyle \lim_{n \to \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

□　$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ のとき

$$P\left(\lim_{n \to \infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

ただし，$\displaystyle \lim_{n \to \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

σ-加法性により極限操作を手に入れた

2. 確率変数

2-1, 確率変数の定義

○ ポイント：確率変数は関数

$\boxed{\text{例}}$ コインを3回投げるとき

$X(\omega)=$「表の出た回数 × 100 円」もらえる

○ 標本空間 $\Omega = \{0,1\}^3$

○ 確率測度 $P(\{\omega\}) = \frac{1}{8} \quad (\omega \in \Omega)$

ω	$X(\omega)$	確率
000	0 円	$P(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=0\}) = \frac{1}{8}$
001 010 100	100 円	$P(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=100\}) = \frac{3}{8}$
011 101 110	200 円	$P(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=200\}) = \frac{3}{8}$
111	300 円	$P(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=300\}) = \frac{1}{8}$

Def　$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を（一般の）確率空間とするとき

関数 $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad\quad \omega \longmapsto X(\omega)$

を確率変数 (random variable) という

Remark

□ 一般には $\mathbb{R}$ とは限らない

$$X : \Omega \to \mathcal{X}$$

$\boxed{\text{例}}$ $\mathcal{X} = \{a, b, c, \cdots, z\}$ alphabet

$\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ n次元ベクトル

$\mathcal{X} = \{$晴れ, 雨, くもり, 雪, $\cdots\}$

□ 本当は以下の条件が必要

$$\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

2-2, 離散型確率変数

Def (可算無限) countable

○ 集合 $\mathcal{X}$ が可算無限

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists g : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{N}$ (自然数全体) natural number

s.t. g は全単射

$\boxed{\text{例}}$ □ $\mathbb{Z}$ (整数全体) は可算無限
integer

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$
$$\cdots \quad 5 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad \cdots$$

□ $\mathbb{Q}_+$ (正の有理数全体) は可算無限 positive rational numbers

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{\frac{n}{m} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N}, m, n > 0\right\}$$

n \ m	1	2	3	4	
1	1	2	4	6	⋰
2	3	×	7	⋰	
3	5	8	⋰		
4	9	⋰			

- $\mathcal{X}$ は高々可算　at most countable

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$　$\mathcal{X}$ は有限または可算無限
finite or countable

- $\mathcal{X}$ は非可算

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$　$\mathcal{X}$ は高々可算ではない

Def　$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ を確率変数

とする

$\mathcal{X} := \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$

（X の値域）

が高々可算のとき

□ X を離散型確率変数という
discrete

□ $P_X(x) := P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$

$x \in \mathcal{X}$

を X の確率関数（probability function）という

Remark

□ 右辺を省略して $P(X = x)$ とかくことが多い

□ P_X により X の性質は定まるので
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は表に出さないことが多い

確率関数の性質

□ $P_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}$

□ $\sum_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) = 1$

2-3. 確率分布関数（累積分布関数）

Def $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 確率空間

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 確率変数 とする

$$F_X(x) := P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\})$$

を <u>X の分布関数 (distribution function)</u> という

Remark

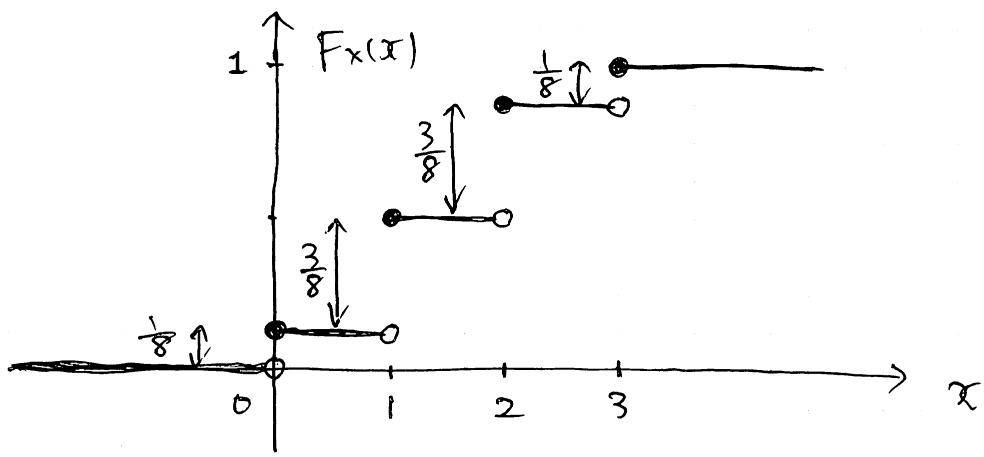
- 右辺を <u>$P(X \leq x)$ と略記</u> することが多い

- $F_X(x)$ により X についての性質は すべて定まる

$\boxed{例}$ コインを3回ふる

$X(\omega) =$ 表の回数 $\times$ 100

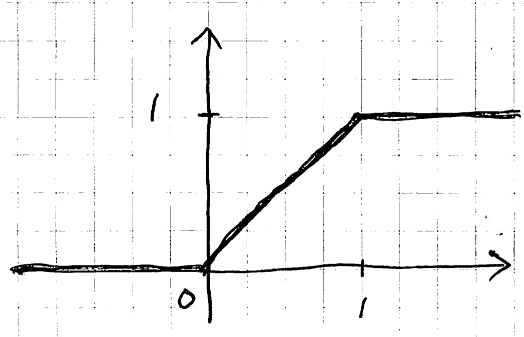
$X(\omega)$	0	1	2	3
$P_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$



$\boxed{例}$ ルーレット $\Omega = [0,1)$

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega \mid \omega \leq x\})$$

$$= \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$



Lem 確率分布関数の性質

(1) $a \leq b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b)$

(単調性)

(2) 右連続 $\lim_{\varepsilon \to 0} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x)$

(3) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

(4) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

(証明略)

2-4, 連続型確率変数

Def

$$F_X(x) = P(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\le x\})$$
$$= \int_{-\infty}^{x} p_X(x)\,dx$$

と書けるとき X を連続型確率変数という
continuous

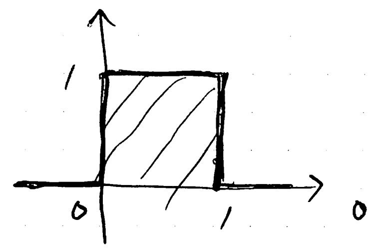
□ $p_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$ を X の確率密度関数という
(probability density function)

○ 確率密度の性質

$$p_X(x)\ge 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx = 1$$

例1 ルーレット

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



一様分布 (uniform probability distribution) という

例1 ルーレット2つのとき
$\Omega_1 = [0, 1)$, $\Omega_2 = [0, 1)$
~~確~~ 標本空間 $\Omega = \Omega_1\times\Omega_2$

確率変数

レポート例題を見て下さい

$$X : \overset{\Omega}{\overset{\shortparallel}{\Omega_1\times\Omega_2}} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\alpha, \beta) \longmapsto X(\alpha,\beta) = \max\{\alpha,\beta\}$$

□ $F_X(x) = P(\{(\alpha,\beta)\in\Omega_1\times\Omega_2 \mid \max\{\alpha,\beta\}\le x\})$
$= P(\{(\alpha,\beta)\in\Omega_1\times\Omega_2 \mid \alpha\le x$ かつ $\beta\le x\})$
$= x^2 \quad (0<x<1)$

□ $p_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx} = 2x \quad (0<x<1)$