

(復習)

- 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- 確率変数 random variable (略 r.v.)

$$\begin{array}{ccc} X: \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array} \quad \text{関数}$$

□ 離散型 r.v.

X のとりうる範囲 (値域) が 離散的
 $\{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$

有限 または 可算無限

確率関数

$$P_X(x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$$

累積分布関数

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\})$$

□ 連続型 r.v.

$\{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ が 連続的 かつ

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\})$$

$$= \int_{-\infty}^x p(x) dx \quad \text{と書ける}$$

微分と積分
の 関係

$$p(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

確率密度関数

- 離散型でも連続型でもなく、確率変数もある

- $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\})$ は

$$P(X \leq x), \quad P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}), \quad P(X \leq x)$$

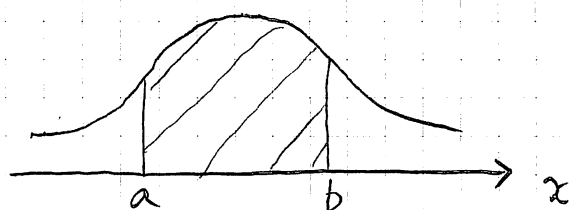
などの省略記法が使われる

(P は Probability の意味)

。確率密度関数の直感的意味

$$\begin{aligned}
 & \square \Pr\{\omega \in \Omega \mid a \leq X(\omega) \leq b\} \\
 &= \Pr\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq b\} - \Pr\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\} \\
 &= F(b) - F(a) \\
 &= \int_{-\infty}^b p(x) dx - \int_{-\infty}^a p(x) dx \\
 &= \int_a^b p(x) dx
 \end{aligned}$$

$X(\omega)$ が a から b の範囲
に入る確率は右図の面積

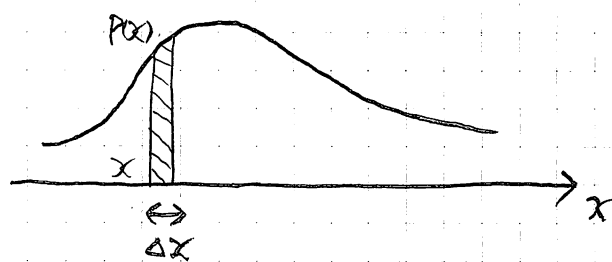


$$\square \quad a = x, \quad b = x + \Delta x \quad \text{と} \quad \text{おくと}$$

$$\begin{aligned}
 & \Pr\{\omega \in \Omega \mid x \leq X(\omega) \leq x + \Delta x\} \\
 &= \int_x^{x+\Delta x} p(x) dx \approx p(x) \Delta x
 \end{aligned}$$

Δx が十分小さいとき

$X(\omega)$ が x 付近の Δx に入る確率は $p(x) \Delta x$



□ 注意：連続型の場合

$$\Pr\{X = a\} = \int_a^a p(x) dx = 0$$

□ 二項定理

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y) \cdots (x+y)}_{n \text{ 回}}$$

$x^k y^{n-k}$ の項の数は

「 k コの x を何番目で選ぶか」の数

$$\parallel$$

$$n C k$$

よって

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n n C k x^k y^{n-k}$$

ここで $x = p$, $y = 1-p$ とおくと

$$\sum_{k=0}^n P_X(k) = \sum_{k=0}^n n C k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (p + (1-p))^n = 1$$

$P_X(k)$ が 確率関数の資格 を持つことが確認できた
 $0 \leq k \leq n$, $\sum_{k=0}^n P_X(k) = 1$

○ 幾何分布 $Ge(p)$ $0 < p < 1$
 Geometrical distribution

$X(\omega) =$ 「コインを表が出るまで投げたとき裏の出る回数」

確率関数

$$P_X(k) = (1-p)^k p \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

□ 確率関数の資格を確認

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k p = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

- ポアソン分布 $P_0(x)$ $\lambda > 0$
Poisson distribution

確率関数

$$P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

- ◻ 確率関数の資格

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

↑
テイラー展開
Taylor expansion

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

- ◻ { 一定時間にかかってくる電話の本数
の事故件数

など多くの偶然現象(あまり起こらない)
がポアソン分布で記述される

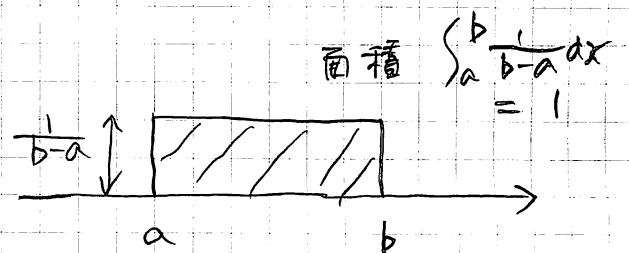
2-6. 代表的な確率変数(連続型)

- 一様分布 $U(a, b)$ $a < b$
Uniform distribution

確率密度関数

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if } a < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$X(\omega)$ が a から b まで
等確率で(一様に)出る



Exponential distribution

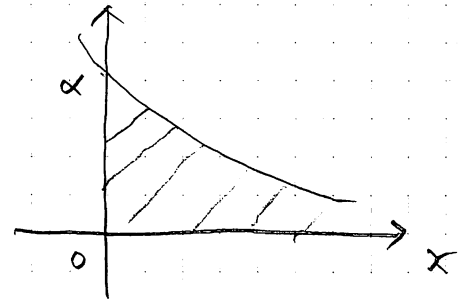
指数分布 $Ex(\alpha)$

$$\alpha > 0$$

$$p(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

確率密度の資格

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx &= \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx \\ &= \left[-e^{-\alpha x} \right]_0^{\infty} \\ &= 0 - (-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$



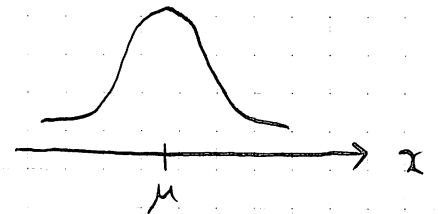
正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

$$\mu \in \mathbb{R}$$

$$\sigma > 0$$

Normal distribution

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



具体的に $N(0, 1)$ のとき

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

確率密度となることの確認

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \right\}^2 &= \iint p(x) p(y) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$r < \infty$

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

アコヒアン

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \end{aligned}$$

微小体積要素

$$dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta = r dr d\theta$$

5.7

$$\textcircled{1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \right\} d\theta$$

$$\left[\tau = \frac{r^2}{2} \text{ とおくと } \frac{d\tau}{dr} = r \therefore r dr = d\tau \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau}_{=1} d\theta$$

$$[-e^{-\tau}]_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1$$

Lem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \quad \text{--- ②}$$

7.7 示すところ

□ $N(\mu, \sigma^2)$ の場合

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad \text{--- (3)}$$

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \text{と置く} \quad x = \sigma y + \mu$$

$$dx = \sigma dy$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1 \end{aligned}$$

↑
②

2-7 確率変数の期待値と分散

Def 確率変数 X の期待値 (平均値)
expectation mean value

$$E[X] := \begin{cases} \sum_x P_X(x) x & (\text{離散的}) \\ \int p_X(x) x dx & (\text{連続的}) \end{cases}$$

$T=T_X$ 和や積分は X の値域全体でとる

Def 確率変数 X の分散 variance

$$V[X] := E[(X - \mu)^2]$$

$$\mu = E[X]$$

平均値からのばらつきの場合

Lem 平均値の性質

$$E[ax+b] = aE[x] + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{+} \quad E[ax+b] &= \sum_x P_X(x) (ax+b) \\ &= a \sum_x P_X(x) x + b \\ &= aE[x] + b \quad // \\ &\quad (\text{連続の場合も同様}) \end{aligned}$$

Lem 分散の性質

$$(1) \quad V[X] \geq 0$$

$$(2) \quad V[X] = E[X^2] - \mu^2 \quad (\mu = E[X])$$

$$(3) \quad V[ax+b] = a^2 V[X]$$

$$\begin{aligned} \textcircled{+} \quad (1) \quad V[X] &= E[(X-\mu)^2] \\ &= \sum_x P_X(x) \underbrace{(x-\mu)^2}_{\geq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad V[X] &= E[(X-\mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{平均値の性質} \rightarrow &= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\ &= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E[X^2] - \mu^2 \end{aligned}$$

$$(3) \quad V[ax+b] = E[\{(ax+b) - \underbrace{E[ax+b]}_{a\mu+b}\}^2]$$

$$\begin{aligned} &= E[(ax - a\mu)^2] \\ &= E[a^2(x-\mu)^2] \\ &= a^2 E[(x-\mu)^2] = a^2 V[X] \quad // \end{aligned}$$

2-8. 代表的な確率変数の期待値と分散

○ 二点分布

$$P(0) = p, \quad P(1) = 1-p$$

$$E[X] = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$$

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

$$\parallel$$

$$p \cdot 1^2 + (1-p) \cdot 0^2 = p$$

○ 二項分布 $\rightarrow$ 次回

○ 幾何分布

$$P(k) = (1-p)^k p$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

微分 $\downarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{k-1} k = \frac{1}{(1-x)^2}$$

 $k \rightarrow k+1$

(= 置きかえ)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k (k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k k + \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k k + \frac{1}{1-x}$$

よって

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k k = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}$$

よって

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k p \cdot k$$

$$= p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k k$$

$$= p \left\{ \frac{1}{(1-(1-p))^2} - \frac{1}{1-(1-p)} \right\}$$

$$= p \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \right) = \frac{1-p}{p}$$

同様に

$$V[X] = \frac{1-p}{p^2}$$