

担当：小川朋宏

1. 正の整数 n と r ($n \geq r$) が与えられたとき, 非負の整数 $x_1, x_2, \dots, x_r$ に関する不定方程式

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

の解の個数を求めよ.

2. 公平なさいころを 2 回投げる.

- (1) 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ はどのようなになるか?
- (2) 1 回目と 2 回目の和が 5 になる事象を示し, その確率を求めよ.

3. 確率測度の公理から以下の式を示せ.

- (1) $\forall A \subset \Omega, P(A) + P(A^c) = 1$
- (2) $\forall A \subset \Omega, 0 \leq P(A) \leq 1$
- (3) $P(\phi) = 0$
- (4) $\forall A, B \subset \Omega, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- (5) (有限加法性) $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ が互いに素ならば

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

4. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と $P(A) \neq 0$ を満たす事象 $A \in \mathcal{F}$ が与えられたとき, 条件付き確率

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (B \in \mathcal{F})$$

が Ω 上の確率測度であることを示せ.

5. 男の子と女の子が生まれる確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする. 子供が二人いる家族に会ったところ「第一子が男の子」であることが分かった.

- (1) 子供の男女構成についての標本空間 Ω を示せ (授業でやった).
- (2) 男の子がもう一人いる確率を求めよ.

6. ある製品を作る機械が 3 台あって, それらを A, B, C とする. A, B, C はそれぞれ全体の 20%, 30%, 50% を生産する. また, A, B, C の各機械から生産される製品のうち, 5%, 4%, 2% の割合で不良品があることが経験的に知られている. いま製品全体の中から 1 個を取り出したとき, それが不良品である確率を求めよ. また, それが不良品であることを知ったとき, それが A, B, C の各機械から生産されたものである確率を求めよ.

7. 次に述べられている命題を証明するか, あるいは反例を示せ.

- (1) A と B が独立ならば A と B^c は独立.
- (2) A と B, B と C, C と A がそれぞれ独立ならば, A と B と C は独立.
- (3) A と B, A と C がそれぞれ独立ならば, A と $B \cup C$ は独立.
- (4) A と B, A と C がそれぞれ独立で $B \cap C = \phi$ ならば, A と $B \cup C$ は独立.
- (5) A と B, B と C, A と $B \cap C$ がそれぞれ独立ならば, $A \cap B$ と C は独立.