

担当：小川朋宏

次の例題を参考にして問題に答えて下さい。

例題：0 から 1 の目盛が振られたルーレットを二つ回す。それぞれの針が指す目盛 α, β についての確率は、理想化すると、以下の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で記述される。

$$\text{標本空間} : \Omega = [0, 1) \times [0, 1) = \{(\alpha, \beta) \mid 0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1\}$$

$$\sigma\text{-代数} : \mathcal{F} = \{A \subset \Omega \mid \text{“}A \text{ は面積が測れる”}\}$$

$$\text{確率測度} : P(A) = \text{“}A \text{ の面積”}$$

このとき、それぞれの針が指す目盛 α, β の最大値を与える関数

$$X : (\alpha, \beta) \in \Omega \mapsto \max\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{R}$$

は確率変数である。確率変数 X の確率密度関数を求める。

解答：最初に X の（累積）確率分布関数を求める。

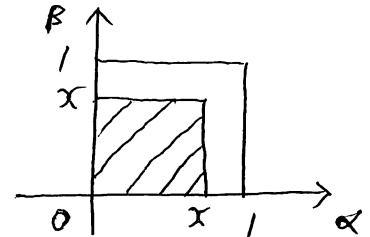
$$\begin{aligned} F(x) &= P(\{(\alpha, \beta) \in \Omega \mid X(\alpha, \beta) \leq x\}) \\ &= P(\{(\alpha, \beta) \in \Omega \mid \max\{\alpha, \beta\} \leq x\}) \\ &= P(\{(\alpha, \beta) \in \Omega \mid \alpha \leq x \text{ かつ } \beta \leq x\}) \end{aligned}$$

ただし、最後の式で

$$\max\{\alpha, \beta\} \leq x \Leftrightarrow \alpha \leq x \text{ かつ } \beta \leq x$$

を用いた。面積を考えることで、確率分布関数が以下のように求められる。

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



これを微分することで確率密度関数が得られる。

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

問題

1. 例題と同じルーレットを考える。ルーレットを二つ回したとき、それぞれの針が指す目盛 α, β の和を与える確率変数

$$X : (\alpha, \beta) \in \Omega \mapsto \alpha + \beta \in \mathbb{R}$$

を考える。 X の確率密度関数を求めよ。

ヒント：2ページの図

2. 例題と同じルーレットを考える。ルーレットを一つ回したとき針が指す目盛を ω とする。

(a) 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を示せ (授業でやった)。

(b) 確率変数

$$X : \omega \in \Omega \mapsto \omega^2 \in \mathbb{R}$$

の確率密度関数を求めよ。

3. 表の出る確率が p , 裏の出る確率が $1-p$ のコインを 3 回投げる。

(a) 表裏の結果 3 回 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ についての確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を示せ。

(b) 確率変数

$$X : \Omega \rightarrow \text{表が出た回数}$$

を考える。 X の確率関数を求めよ。

解答として表を書いても良い。

4. X を確率分布関数 F_X を持つ確率変数であるとする。 $Y = F_X(X)$ は二つの写像

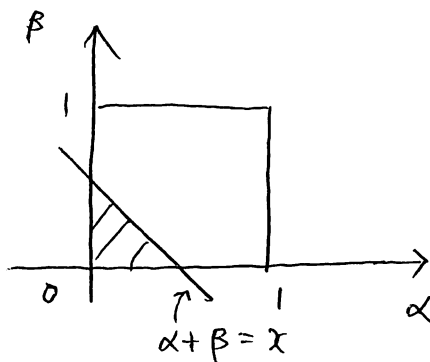
$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

の合成写像 $Y : \Omega \rightarrow [0, 1]$ とみなせるので確率変数である。 F_X は連続かつ一対一であるとする。

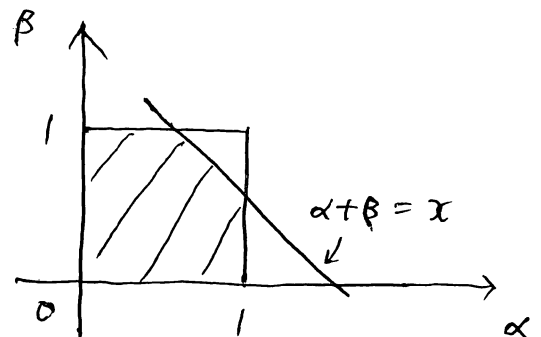
(a) Y の確率分布関数 F_Y を求めよ。

(b) Y の確率密度関数を求めよ。

問 1 のヒント



$$0 \leq x < 1$$



$$1 \leq x < 2$$