情報ネットワーク学基礎１レポート

2009-7-15

担当：小川朋宏

1. 同時確率関数 $P_{XY}(x, y)$ $(x = 1, 2,\ y = 1, 2, 3)$ が以下の表で与えられるとき，周辺確率関数 $P_X(x)$, $P_Y(y)$ と，条件付き確率関数 $P_{Y|X}(y|x)$ $(x = 1, 2)$, $P_{X|Y}(x|y)$ $(y = 1, 2, 3)$ を求めよ．約分する必要はない．また，解答として表を用いてもよい．

$x \diagdown y$	1	2	3
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$

2. 期待値と分散に関する以下の性質を証明せよ．
   (a) 確率変数 X, Y が独立ならば，$E[XY] = E[X]\,E[Y]$
   (b) $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$

3. (a) ２点分布 $P_Z(1) = p$, $P_Z(0) = 1 - p$ に従う確率変数 Z について，平均と分散を求めよ．
   (b) 二項分布 $B(n, p)$ に従う確率関数 X の平均と分散を求めよ．

$$\text{ヒント：}\quad X = \sum_{i=1}^{n} Z_i \quad (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{２点分布})$$

4. 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ に従う確率変数 X について，$E[X] = \mu$, $V[X] = \sigma^2$ であることを以下の手順で示せ．
   (a) Y が正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ に従うとき

$$E[Y] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = 0$$

   となる．理由を述べよ．
   (b) 上式を y で微分することで，$V[Y] = 1$ となることを示せ．微分と積分は交換してよい．
   (c) X が $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ に従うとき，$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ は $\mathrm{N}(0, 1)$ に従うことを示せ．
   (d) 平均と分散の性質を用いて $E[X] = \mu$, $V[X] = \sigma^2$ を示せ．