1. Review of linear algebra

1-1 vector space
(linear space)

V: vector space.

example

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \middle| \, v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

$$P^3 = \{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

たとえば

$$\begin{array}{rl} 2x^2 + 3x + 4 & \in P^3 \\ +)\ 3x^2 + x - 1 & \in P^3 \\ \hline 5x^2 + 4x + 3 & \in P^3. \end{array}$$

足し算.

$$3 \cdot (\underset{\substack{\cup \\ P^3}}{2x^2 + 3x + 4}) = 6x^2 + 9x + 12 \in P^3.$$ スカラー倍

$$0x^2 + 0x + 0 = 0 \in P^3.$$ zero element.

~~1-2~~

$P_3 \approx \mathbb{C}^3.$

1-2 表現行列

$e_1, e_2, \cdots, e_n \in V$

が基底 (basis)

(1) $\forall v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \qquad v_i \in \mathbb{C}.$$

(2) $e_1, e_2, \cdots, e_n$ は一次独立.

(1), (2) をみたす $e_1, e_2, \cdots, e_n$ を基底という.

linear operator

$$A: V \to W$$

vector space

(1) $A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2$.

※普通. 写像は $A(v)$ のようにかくが
線形作用素に限っては Av とかく.
(カッコを省略する)

(2) $A(cv) = cAv$. $\quad c \in \mathbb{C}$.

(1)(2) をみたす A を線形作用素という. 　　線形作用素 〜 行列

$$A: V \to W.$$

$e_1, \cdots, e_n$: V の基底

$f_1, \cdots, f_m$: W の基底

$$V \ni v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$$

$$W \ni w = \sum_{j=1}^{m} w_j f_j$$

V の基底の行先を考える.

$$W \ni Ae_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j \quad (i = 1, \cdots, n)$$

以下のように書く

$$A[e_1 \cdots e_n] := [Ae_1 \cdots Ae_n]$$

$$= [f_1 \cdots f_m] \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\equiv \hat{A}}$$

$\hat{A}$ を A の表現行列という.

$w = Av$ の関係

$w \in W$, $v \in V$

$$[f_1 \cdots f_m]\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \underbrace{A\,[e_1 \cdots e_n]}_{[f_1 \cdots f_m]\hat{A}}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

よって

$$[f_1 \cdots f_m]\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = [f_1 \cdots f_m]\,\hat{A}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

ベクトルの基底による表現の一意性より

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \hat{A}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

※もちろんこのベクトルや行列の数値は基底のとり方に依存している.

1-3 基底の変換

※基底の選び方によって表現の数値は異なるが、
　ベクトルそのものは基底によらないはず

V の基底　$[e_1 \cdots e_n]$

　　　　　$[e_1' \cdots e_n']$

W の基底　$[f_1 \cdots f_m]$

　　　　　$[f_1' \cdots f_m']$

$k = 1, \cdots, n \quad l = 1, \cdots, m$ として

e_k' や f_l' はそれぞれ V や W のベクトルであるので、

$$V \ni e_k' = \sum_{i=1}^{n} S_{ik} e_i$$

$$W \ni f_l' = \sum_{j=1}^{m} T_{jl} f_j$$

ブロックで書くと、

$$[e_1' \cdots e_n'] = [e_1 \cdots e_n] S$$

$$S = [S_{ik}]$$

$$[f_1' \cdots f_m'] = [f_1 \cdots f_m] T$$

$$T = [T_{jl}]$$

基底の変換則に対して
同じ方向：共変
逆の方向：反変

$$V \ni v = [e_1 \cdots e_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= [e_1' \cdots e_n'] \begin{bmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix} = [e_1 \cdots e_n] S \begin{bmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix}$$

一意性より、 $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix}$

※反変性

$A : V \to W$

◎ 基底 $[e_1 \cdots e_n]$ on V.

$[f_1 \cdots f_m]$ on W.

についての表現行列.

$$A[e_1 \cdots e_n] = [f_1 \cdots f_m]\hat{A}$$

◎ 基底 $[e_1' \cdots e_n']$ on V.

$[f_1' \cdots f_m']$ on W

$$A[e_1' \cdots e_n'] = [f_1' \cdots f_m']\hat{A}'$$

$[e_1' \cdots e_n'] = [e_1 \cdots e_n]S$ と $[f_1' \cdots f_m'] = [f_1 \cdots f_m]T$ を使って.

$$A[e_1 \cdots e_n]S = [f_1 \cdots f_m]T\hat{A}'$$

S^{-1} を右からかける.

$$A[e_1 \cdots e_n] = [f_1 \cdots f_m]T\hat{A}'S^{-1}$$
$$= [f_1 \cdots f_m]\hat{A}$$

$\hat{A} = T\hat{A}'S^{-1}$ (変換公式)

1−4 内積と Hilbert 空間

V : vector space on $\mathbb{C}$.

ベクトルを2つ選べば1つスカラーが決まる写像 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を考える

$a, b \in V \quad \langle a, b\rangle \in \mathbb{C}$.

これが以下をみたすとき $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を内積という.

(1) $\langle a, c_1 b_1 + c_2 b_2\rangle \qquad a, b_1, b_2 \in V \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$= c_1\langle a, b_1\rangle + c_2\langle a, b_2\rangle$ ※右側が線形性をみたす.

(左側は反線形 or 歪線形)

$\langle c_1 a_1 + c_2 a_2, b\rangle = \bar{c}_1\langle a_1, b\rangle + \bar{c}_2\langle a_2, b\rangle$

(2) $\overline{\langle a, b\rangle} = \langle b, a\rangle$.

複素共役 complex conjugate ※複素共役をとると左右がいれかわる.

(3) $\langle a, a\rangle \geq 0$.

$\langle a, a\rangle = 0$ は $a = 0$ であるときのみ.

※ $\langle a, a\rangle$ が実数であるのは(2)より明らか.

<u>example</u> $\mathbb{C}^n$. $\quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

$$\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i b_i$$

○内積は一意ではない.

example $\mathbb{C}^2 \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

$$\langle a, b\rangle_{(1)} = \bar{a}_1 b_1 + \bar{a}_2 b_2$$

$$\langle a, b\rangle_{(2)} = 2\bar{a}_1 b_1 + 3\bar{a}_2 b_2.$$

いくらでも内積はつくれる.

$\mathcal{H}$: Hilbert 空間

$\left\{ \begin{array}{l} \text{vector space} \\ \quad + \\ \text{内積} \ \langle \cdot , \cdot \rangle \ \text{指定} \end{array} \right.$

1-5 braket notation
(記法)

Hilbert 空間の要素

$|v\rangle \in \mathcal{H}$. ケット ket ベクトル

以下 $\langle v|$ を定義する.
ブラ bra ベクトル.

※ かっこ $\langle | \rangle$
bra|cket

dual vector space 双対ベクトル空間

$$V^* = \{ \underbrace{f}_{\uparrow} : V \xrightarrow[\text{linear}]{} \mathbb{C} \}.$$

線形汎関数 (functional).

$\mathbb{C} \ni f(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 f(v_1) + c_2 f(v_2)$. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $v_1, v_2 \in V$

V^* は次の和, スカラー倍によって vector space となる
(みなせる).

$f, g \in V^*$. $v \in V$. $c \in \mathbb{C}$

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v)$$

$$(cf)(v) := c\, f(v)$$

これによって, 和とスカラー倍は閉じたものとなる.

$\vec{0} \in V^*$ (zero element) は. $\forall v \in V$

$$(\vec{0})(v) = 0 \in \mathbb{C}$$

$\mathcal{H}$: Hilbert 空間

$|v\rangle \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{array}{ccccc} f_v : & |x\rangle & \overset{\text{linear}}{\longmapsto} & \langle v, x\rangle \\ \cap & \cap & & \cap \\ \mathcal{H}^* & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$

$|v\rangle \in \mathcal{H}$ に対して, f_v を $\langle v|$ と書く

$$\begin{array}{cc} \langle v| & (|x\rangle) \\ \cap & \cap \\ \mathcal{H}^* & \mathcal{H} \end{array} = \langle v, x\rangle$$

表記の便利さから

$\langle v|x\rangle$ とかく. 意味は内積 $\langle v, x\rangle$ と同じ.

$|x\rangle\langle v|$ も意味をもつ.

$$|x\rangle\langle v| \; (\underset{\mathcal{H}}{\underset{\cap}{|y\rangle}}) = |x\rangle \underbrace{\langle v|y\rangle}_{\text{スカラー } \mathbb{C}}$$

$$= \langle v, y\rangle |x\rangle \quad \in \mathcal{H}.$$

線形

$|x\rangle\langle v| : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. linear operator.

$$\mathrm{rank}(|x\rangle\langle v|) = \dim(\underset{\{c|x\rangle \mid c \in \mathbb{C}\}}{\underset{\parallel}{\mathrm{Image}(|x\rangle\langle v|)}})$$

$$= 1$$