2. Hilbert 空間上の operator

作用素 $\approx$ 行列

$$A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$
$$\quad\ \rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad$$
$$|x\rangle \underset{\text{linear}}{\longmapsto} A|x\rangle$$

2.1 リースの表現定理

<u>例</u> $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \ x_1 \cdots x_n \in \mathbb{C} \right\}$

内積 $\langle x, y \rangle = \sum_{x=1}^{n} \overline{x_i} y_i$

$\mathcal{H}$ 上の線形汎関数

$$f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\quad\ \rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad$$
$$|x\rangle \underset{\text{linear}}{\longmapsto} f(x)$$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ と書ける.

$\because$ 線形 $\rightarrow$ 1次式

$f(\vec{0}) = 0 \rightarrow$ 定数項 $= 0$

よって $y_f = \begin{pmatrix} \overline{w_1} \\ \vdots \\ \overline{w_n} \end{pmatrix}$ とおくと, f は内積の形でかける. すなわち

$$f(x) = \langle y_f, x \rangle$$

Thm (リースの表現定理, Riesz' representation theorem)

$\forall f \in \mathcal{H}^*$ に対し

$\exists y_f \in \mathcal{H}$, $f(x) = \langle y_f, x \rangle$ $(\forall x \in \mathcal{H})$ しかも一意.

2.2 sesqui-linear form
(歪-線形形式)
(ヌメ)

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & (x, y) & \longmapsto & \varphi(x, y) \\ & \cap & & \cap \\ & \mathcal{H} \times \mathcal{H} & & \mathbb{C} \end{array}$$

が内積の条件(1)(2)が成り立つとき Sesqui-lin. form という

Lem sesqui-lin. form φ に対して,

$\underset{\text{operator}}{\exists A}$, $\varphi(x, y) = \langle x, Ay \rangle$ しかも A は一意.

(:)
$f_y(x) := \overline{\varphi(x, y)}$

$$\begin{array}{cccc} f_y : & |x\rangle & \longmapsto & \overline{\varphi(x, y)} \\ & \cap & & \cap \\ & \mathcal{H} & \text{linear} & \mathbb{C} \end{array}$$

リース表現より. $\exists Z_y \in \mathcal{H}$.

$f_y(x) = \langle Z_y, x \rangle$

$$\begin{array}{ccc} y & \longmapsto & Z_y \\ \cap & & \cap \\ \mathcal{H} & & \mathcal{H} \end{array}$$

この対応は線形

$$\begin{cases} Z_{\alpha y} = \alpha Z_y & (\alpha \in \mathbb{C}) \\ Z_{y_1 + y_2} = Z_{y_1} + Z_{y_2} \end{cases}$$

これは線形 operator $\therefore$ $\exists A$: operator

$Z_y = Ay$.

$f_y(x) = \langle Ay, x \rangle$

よって

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \overline{f_y(x)} \\ &= \overline{\langle Ay, x \rangle} \\ &= \langle x, Ay \rangle \qquad \lrcorner\end{aligned}$$

2.3 エルミート共役 (Hermite conjugate)

<u>例</u>

$\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ 行列 $A = (a_{ij})$ $\quad A^* = \overline{A^T} = (\overline{a_{ji}})$

$\overline{}$

$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ given lin. operator

$\varphi(x, y) := \langle x, Ay \rangle$ は sesqui-lin. form

$f(y, x) := \overline{\varphi(x, y)} = \langle Ay, x \rangle$ も sesqui-lin. form

なので. $\exists ! A^*$: operator

$f(y, x) = \langle y, A^* x \rangle$

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \langle x, Ay \rangle \\ \| \\ \overline{f(y, x)} &= \overline{\langle y, A^* x \rangle} \\ &= \langle A^* x, y \rangle\end{aligned}$$

<u>定義</u> (エルミート共役)

Aに対して

$\langle x, Ay \rangle = \langle A^* x, y \rangle$

となる A^* が唯一存在する.

この A^* を Aの エルミート共役という.

Lem

$(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^* \quad (\alpha \in \mathbb{C})$

$(A+B)^* = A^* + B^*$

$(AB)^* = B^* A^*$

2.4 エルミート（Hermite，自己共役）operator

定義（エルミート作用素）

$A^* = A$ のとき

A を エルミート作用素 という

定義（作用素の固有値，固有ベクトル）

A を一般の作用素とする．$x \in \mathcal{H}$，$\lambda \in \mathbb{C}$ で
$\underset{\neq 0}{}$

$Ax = \lambda x$

となるとき

λ：固有値 eigen value

x：固有ベクトル eigen vector という

以下 A をエルミート作用素とする．

○ エルミート作用素の固有値は実数

∵ x を eigen vec. λ を eigen value とする．

$\langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$

A のエルミート性より

$\langle x, Ax \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$

よって

$(\lambda - \bar{\lambda}) \langle x, x \rangle = 0$　　$\langle x, x \rangle \neq 0$ より　$\lambda - \bar{\lambda} = 0$

よって　$\lambda = \bar{\lambda}$　なので　$\lambda \in \mathbb{R}$ ┘

○ A：エルミートとする．Aに対し，固有値 $\lambda \neq \mu$ があり，それぞれの固有ベクトルを x，y とする．つまり，

$$Ax = \lambda x$$
$$Ay = \mu x$$

このとき $\langle x, y \rangle = 0$．つまり x と y は直交する．

∵ $\langle x, Ay \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$

エルミート性より

$$\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

（λは実数）

よって，

$$(\mu - \lambda)\langle x, y \rangle = 0$$

$\mu - \lambda \neq 0$ より

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Thm

Aをエルミート行列とする．

$\dim \mathcal{H}$ を n とすると，Aの固有値は重複を許せば n 個あり，それらの固有ベクトルを正規直交基底にとることができる．つまり，

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ：固有値

$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \quad \updownarrow$

$|e_1\rangle, |e_2\rangle, \cdots, |e_n\rangle$ ：固有ベクトル

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は同じものがあってもよい．

$|e_1\rangle, \cdots, |e_n\rangle$ を正規直交基底にとることができる．（証明略）

ref. 線形代数のtext

※正規直交基底（Orthogonal Normal System：ONS）

base

$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ ：ノルム，長さ とすると，

$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \ \|e_i\| = 1$．

$$\forall i, j \in \{1, \cdots, n\} \quad \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$\parallel$

δ_{ij} クロネッカーのデルタ

これより.

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \overbrace{|e_i\rangle\langle e_i|}^{\text{行列}} \quad — ㊀$$

と書ける.

∵ $|e_1\rangle, \cdots, |e_n\rangle$ ONS の行先で operatorが定まる.

$k\in\{1,\cdots,n\}$

$A|e_k\rangle = \lambda_k |e_k\rangle$

一方.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|e_i\rangle\langle e_i|\right)|e_k\rangle = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i|e_i\rangle \underbrace{\langle e_i, e_k\rangle}_{=\delta_{ik}}$$

$$= \lambda_k|e_k\rangle$$

よって. 基底での変化が同じなので, Aと$\sum\lambda_i|e_i\rangle\langle e_i|$は同じ作用素である.

㊀を固有値分解 (Schatten 分解)

Remark

固有値に重複がある場合: 分解は一意でない.

(一意ないところをうまくとることが問題となってくる)

2.6. 非負定値 operator

定義 operator $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ が

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad \langle x, Ax \rangle \geq 0$$

のとき A は非負定値（半正定値, non negative definite）という

$A \geq 0$ とかく.

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad \langle x, Ax \rangle > 0$$

のとき A は正定値（positive definite）といい

$A > 0$ とかく.

Lem 以下は同値

(1) $A \geq 0$

(2) A はエルミート, 固有値が全て非負

（証明）

(1) ⇒ (2)

$$A \geq 0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in \mathcal{H} \quad \langle x, Ax \rangle \geq 0, \quad \langle x, Ax \rangle \in \mathbb{R} \text{ より}$$

$$\langle x, Ax \rangle = \langle A^* x, x \rangle = \overline{\langle A^* x, x \rangle} = \langle x, A^* x \rangle$$

よって.

$$\forall x \in \mathcal{H}. \ \langle x, (A - A^*) x \rangle = 0.$$

Fact. 以下は同値.

(1) $A = 0$

(2) $\forall x, \forall y \in \mathcal{H}, \quad \langle x, Ay \rangle = 0$

(3) $\forall x \in \mathcal{H}. \quad \langle x, Ax \rangle = 0$

(1) ⇒ (2) ⇒ (3) は明らか

(3) ⇒ (1) は省略

上のFactより $A=A^*$

(2) $\Rightarrow$ (1)

固有値分解

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$$

ここで $\forall i\in\{1,\cdots,n\}$ $\lambda_i\geq 0$.

$\forall x\in\mathcal{H}$ について

$$\begin{aligned}\langle x, Ax\rangle &= \langle x, \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|e_i\rangle\langle e_i|\right)|x\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \underbrace{\langle x|e_i\rangle}_{=\overline{\langle e_i|x\rangle}}\langle e_i|x\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\underset{\geq 0}{\lambda_i}\,\underset{\geq 0}{|\langle e_i|x\rangle|^2}\\ &\geq 0\end{aligned}$$

$\mathbb{C}$の絶対値 abs. val.

∴ 定義より $A\geq 0$.

□