3-6 例 qubit (量子二準位系)

$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

$s \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ は 実数 x, y, z を用いて,

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

と表せられる.

$\because$ $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ について, Aは, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ を用いて,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と表すことができる.

ここで, $A^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$ ただし, $\overline{a}$ はaの複素共役.

$\mathcal{L}(\mathbb{C}^2) = \{ s \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2) \mid \mathrm{Tr}\, s = 1,\ s \geq 0 \}$ より,

$S \geq 0 \Rightarrow S = S^*$

この条件をみたすためには,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$$

より. $a = \overline{a}$, $d = \overline{d}$ $\therefore$ $a, d \in \mathbb{R}$.

$c = \overline{b} = \alpha + \beta i$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

となっていなければならない. よって S は. 少なくとも

$$S = \begin{pmatrix} a & \alpha - \beta i \\ \alpha + \beta i & d \end{pmatrix}$$

とかける.

ここで $\mathrm{Tr}\, S = 1$ より，$a + d = 1$.

ここからパラメータ z を用いて.

$$a = \frac{1+z}{2}, \quad d = \frac{1-z}{2}$$

と表せる. 又、$\alpha = \frac{x}{2}$，$\beta = \frac{y}{2}$ と x, y を用いておきなおすと

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

となっている.

$S \geq 0$?

$S \geq 0 \Leftrightarrow$ 固有値 $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. ($\lambda_1 \geq \lambda_2$ としておく)

ここで固有値は、x, y, z を用いて、

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}$$

と表せる. ここから

$$S \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 1$$

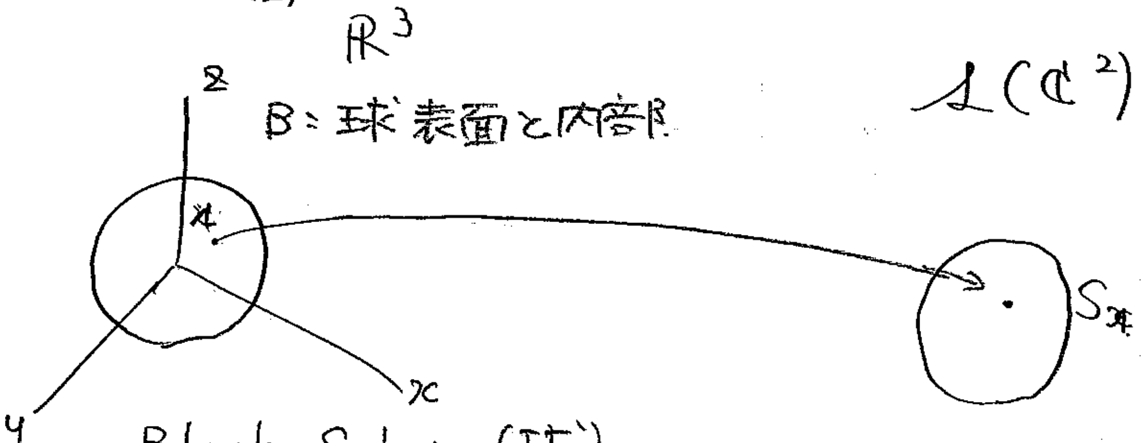
以上により. $S \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ は.

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1$$

と表せる.

ここで $\mathbb{R}^3$ 内の閉集合 B を次のようにとる．

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \le 1 \right\}.$$



Bloch Sphere (球)

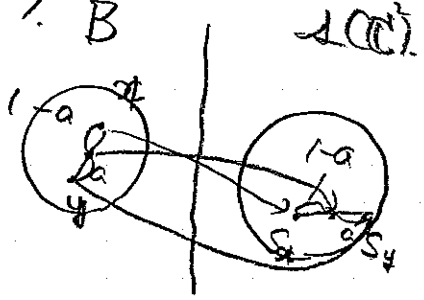
$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{C}^2) \\ \cup\!\!\!\!\!\;\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\;\shortmid \\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = S_{\boldsymbol{x}} \end{array}$$

これを Bloch 表現．(Stokes 表現) という．

ここで，x, y, z を Stokes parameter という．

o この対応は，

- 1対1 (単射かつ全射，bijection)
- affine



$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B \subset \mathbb{R}^3$，$\forall a \in [0, 1]$．

$a\boldsymbol{x} + (1-a)\boldsymbol{y} \in B$.

$S_{a\boldsymbol{x}+(1-a)\boldsymbol{y}} = a S_{\boldsymbol{x}} + (1-a) S_{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$

パラメータが線形になっている．

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき. $S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ← 完全混合状態という.

○ S_x が pure state.

$\Leftrightarrow$ λ_1, λ_2 の中で1つだけ1.

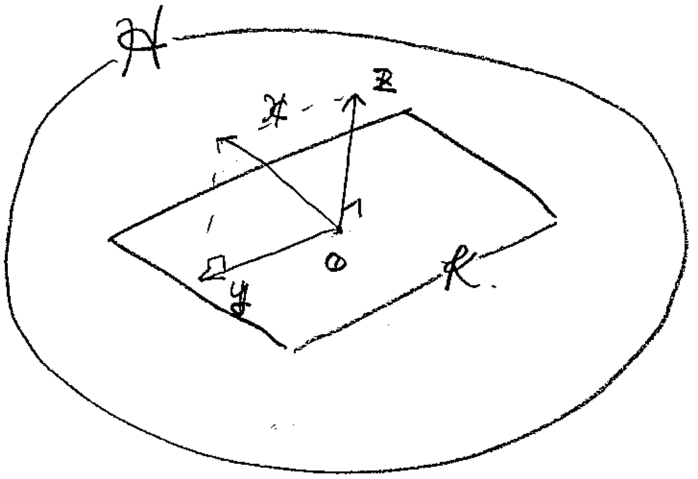
$\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$. ($\because$ $\lambda_1 \geq \lambda_2$)

$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (球の表面)

3-7 射影子
(projection)

$\mathcal{H}$: Hilbert space.

$K \subset \mathcal{H}$ subspace.(部分空間)(Hilbert空間の性質をもった部分空間を考える)



Def (直交補空間)

$\mathcal{H}$ 内に部分空間 K が与えられているとする.

この時 K に対しての直交補空間 $K^\perp$ (読み. ケー・パープ) は次のように定義される. (※ $\perp$: perp, perpendicular)

$$K^\perp = \{ |x\rangle \in \mathcal{H} \mid \forall |y\rangle \in K, \ \underbrace{\langle x|y\rangle = 0}_{\text{直交}} \}$$

Lem.

$\forall |x\rangle \in \mathcal{H}, \ \exists! |y\rangle \in K, \ \exists! |z\rangle \in K^\perp$

$$|x\rangle = |y\rangle + |z\rangle$$

<u>proof (sketch)</u>

K の ONS を

$|e_1\rangle, \cdots, |e_k\rangle \quad k = \dim K.$

とすると, $\mathcal{H}$ の ONS を

$$\underbrace{|e_1\rangle, \cdots, |e_k\rangle}_{\text{ONS on } K}, \underbrace{|e_{k+1}\rangle, \cdots, |e_n\rangle}_{\text{ONS on } K^\perp} \quad n = \dim \mathcal{H}$$

と取ることができる．
（基底の延長 ＋ Gram - Schmidt 直交化より）

よって $\forall |x\rangle \in \mathcal{H}$ は．

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i |e_i\rangle$$

と展開される．

$$|x\rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} x_i |e_i\rangle}_{= |y\rangle \in K} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} x_j |e_j\rangle}_{= |z\rangle \in K^\perp}.$$

これにより．

$$|x\rangle = |y\rangle + |z\rangle. \quad \dashv$$

一意性については．

$$\boxed{\begin{array}{l} K \cap K^\perp = \{0\}. \\ \because \quad y \in K, \; y \in K^\perp. \\ \quad \langle y, y\rangle = 0 \Rightarrow y = 0. \end{array}}$$

よって．

$$\mathcal{H} = K \oplus K^\perp$$

直和 → 一意． ⌟

Def

$$|x\rangle = \underset{\substack{\cap \\ K}}{|y\rangle} + \underset{\substack{\cap \\ K^{\perp}}}{|z\rangle}$$

$$P_K : |x\rangle \longmapsto |y\rangle$$

この写像は linear operator

このPKを部分空間K上への射影子という.

Lem $K \subset \mathcal{H}$.

(1) $|y\rangle \in K$ のとき,

$$P_K|y\rangle = |y\rangle$$

[∵ $|y\rangle = \underset{\substack{\cap \\ K}}{|y\rangle} + \underset{\substack{\cap \\ K^{\perp}}}{0}$

(2) $|z\rangle \in K^{\perp}$ のとき,

$$P_K|z\rangle = 0.$$

[∵ $|z\rangle = \underset{\substack{\cap \\ K}}{0} + \underset{\substack{\cap \\ K^{\perp}}}{|z\rangle}$

(3) $P_K + P_{K^{\perp}} = I$ (恒等)

[∵ $|x\rangle = \underset{\substack{\cap \\ K}}{|y\rangle} + \underset{\substack{\cap \\ K^{\perp}}}{|z\rangle}$

$P_K|x\rangle = |y\rangle$

$P_{K^{\perp}}|x\rangle = |z\rangle$

$$\begin{aligned}(P_K + P_{K^{\perp}})|x\rangle &= P_K|x\rangle + P_{K^{\perp}}|x\rangle \\ &= |y\rangle + |z\rangle \\ &= |x\rangle.\end{aligned}$$

Lem $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$について 以下は同値

(1) Pはある$K \subset \mathcal{H}$への射影子

(2) $P \geq 0$, $P^2 = P$

(3) $P^* = P$, $P^2 = P$

Proof (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1)

(1) ⇒ (2)

$P = P_K$ とする.

$\forall |x\rangle \in \mathcal{H}$, $|x\rangle = |y\rangle + |z\rangle$ $\left(|y\rangle \in K, \ |z\rangle \in K^{\perp}\right)$

となっている.

前ページ Lem(1)

・今 $P^2|x\rangle = P(P|x\rangle) = P|y\rangle = |y\rangle$

一方 $P|x\rangle = |y\rangle$

$\therefore \forall |x\rangle \in \mathcal{H}$, $P^2|x\rangle = P|x\rangle$

$\therefore P^2 = P$

・$P \geq 0$? $|x\rangle \in \mathcal{H}$ $|x\rangle = |y\rangle + |z\rangle$ について

$$
\begin{aligned}
\langle x|P|x\rangle &= (\langle y| + \langle z|)\, P|x\rangle \\
&= (\langle y| + \langle z|)\, |y\rangle \\
&= \langle y|y\rangle + \langle z|y\rangle \\
&= \langle y|y\rangle \\
&= \|y\|^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$\left(|z\rangle \in K^{\perp} \ |y\rangle \in K \text{より} \ \langle z|y\rangle = 0 \right)$

$|x\rangle \in \mathcal{H}$は任意なので, $P \geq 0$ ⌟

(2) ⇒ (3)

一般に $P \geq 0 \Rightarrow P^* = P$

よって明らか.

(3) ⇒ (1).

$P^* = P$, $P^2 = P$ を仮定.

$K = \mathrm{Im}\, P = \{ P|x\rangle \mid |x\rangle \in \mathcal{H} \}$.

とおく.

$$|x\rangle = P|x\rangle + (I-P)|x\rangle$$

ここで $|y\rangle = P|x\rangle$　$|z\rangle = (I-P)|x\rangle$ とすると,

$|y\rangle \in K$ は Kの定義より明らか.

$|z\rangle \in K^\perp$ を示せばよい.

$\forall |y'\rangle \in K$ について $\langle y'|z\rangle = 0$ を示す.

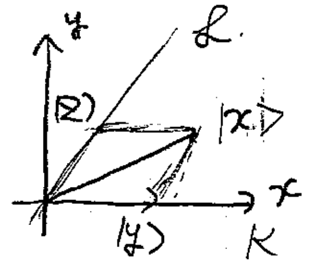
$|y'\rangle \in K$ より

$\exists |x'\rangle$ s.t. $|y'\rangle = P|x'\rangle$

$$\begin{aligned}\langle y'|z\rangle &= \langle Px' | (I-P)x\rangle \\ &= \langle x' | P^*(I-P)x\rangle \\ &= \langle x' | (P-P^2)x\rangle \\ &= \langle x' | (P-P)x\rangle \\ &= 0. \quad \lrcorner\end{aligned}$$

<u>remark</u>　$I-P$ は $K^\perp$ への射影子.

<u>question</u>　$P^* = P$ の条件をはずす?



$\mathcal{H} = K \oplus \mathcal{L}$ は代数的直和. i.e.

$\forall |x\rangle \in \mathcal{H}$. $|x\rangle = \underset{\substack{\uparrow\\ K}}{|y\rangle} + \underset{\substack{\cap\\ \mathcal{L}}}{|z\rangle}$

と唯一分解可能

$Q : |x\rangle \longmapsto |y\rangle$

$Q^2 = Q$ が成立（代数的 べき等元）
Idempotent

ただし，$Q^* = Q$ は成立しない．
($Q \geq 0$)

$P^2 = P$, $P^* = P$ を直交射影子という．

この授業では．射影子 ＝直交射影子．