2011/6/3

3-7 射影子

$\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$　subspace

$P_{\mathcal{K}}$ ： $\mathcal{K}$への射影子

$\mathcal{K}$の ONS　$|e_1\rangle \cdots |e_k\rangle$　$(k = \dim \mathcal{K})$

とするとき

$$P_{\mathcal{K}} = \sum_{i=1}^{k} |e_k\rangle\langle e_k|$$

例　$\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$、$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C} \right\}$

$$P_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(1\,0\,0)}_{|e_1\rangle\langle e_1|} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}(0\,1\,0)}_{|e_2\rangle\langle e_2|}$$

<u>proof</u>　$\mathcal{H}$の ONS を

$$\underbrace{|e_1\rangle, \cdots |e_k\rangle}_{\mathcal{K}\text{の ONS}}, |e_{k+1}\rangle \cdots |e_n\rangle \quad (n = \dim \mathcal{H})$$

とすると $|x\rangle \in \mathcal{H}$ は

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i |e_i\rangle$$ と書ける

$$|x\rangle = |y\rangle + |z\rangle$$

$$\underset{\mathcal{K}}{\underset{\cap}{|y\rangle}} \qquad \underset{\mathcal{K}^\perp}{\underset{\cap}{|z\rangle}}$$

$$p = \sum_{i=1}^{k} |e_i\rangle\langle e_i|$$ とおくと

$$p|x\rangle = \left(\sum_{i=1}^{k} |e_i\rangle\langle e_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j |e_j\rangle\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_j |e_i\rangle \underbrace{\langle e_i|e_j\rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i |e_i\rangle \in \mathcal{K}$$

これを $|y\rangle$ として

$$|z\rangle = |x\rangle - |y\rangle = \sum_{i=k+1}^{n} x_i |e_i\rangle \in \mathcal{K}^\perp$$

これより $p = p_k$ □

3-8 スペクトル分解

Aをエルミート作用素とすると固有値分解

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i| \qquad (n = \dim \mathcal{H})$$

λ_i：固有値　$i = 1, 2, \cdots, n$

$|e_i\rangle$：固有ベクトル　ONS

固有値の重複を考えてインデックスを付け直す

$$\lambda_{1,1} = \lambda_{1,2} \cdots = \lambda_{1,j_1} \equiv a_1$$

$\neq$

$$\lambda_{2,1} = \lambda_{2,2} \cdots = \lambda_{2,j_2} \equiv a_2$$

j_1 j_2 j_n 重複度

異なる

$\vdots$

合計n個

$$\lambda_{m,1} = \lambda_{m,2} \cdots = \lambda_{m,j_m} \equiv a_m$$

m：異なる固有値の数

このとき

$$A = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{j_k} \boxed{\underbrace{\lambda_{k,l}}_{=\, a_k\ (\text{定数})}} |e_{k,l}\rangle\langle e_{k,l}|$$

［ただし、$|e_1\rangle \cdots |e_n\rangle$ を $\lambda_{k,l}$ と同様にインデックスを付け直した］

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k \underbrace{\sum_{l=1}^{j_k} |e_{k,l}\rangle\langle e_{k,l}|}_{= E_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k E_k \quad \text{——} \quad \otimes$$

E_kは

$$\mathcal{K}_k \equiv \mathrm{span}\{|e_{k,l}\rangle \mid l = 1 \sim j_k\}$$

固有値a_kの固有部分空間

$$= \{|\psi\rangle \in \mathcal{H} \mid A|\psi\rangle = a_k|\psi\rangle\}$$

への射影子

㊟をAの<u>スペクトル分解</u>という。

㊟の分解は一意、一方で固有値分解は固有値に重複がある場合一意ではない

例、$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ スペクトル分解

$$A = 2\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$ 固有値分解

$$= 2\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{射影子}} + 2\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{一意ではない}} + 3\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

スペクトル分解㊟において

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{m} E_k}_{\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|} = I$$

$$E_k E_l = \delta_{k,l} E_k$$ [ことなる固有値に対応する固有ベクトルは直交]

3-9 Projection Valued Measure

(射影測定, PVM)

Def. POVM (測定)

$M = \{M_x\}_{x \in \mathcal{X}}$

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{x\in\mathcal{X}} M_x = I \\ M_x \geq 0 \end{array}\right]$$

において M_x がすべて射影子のとき PVM と呼ぶ

$M = \{M_x\}$ が PVM のとき

$E_x E_y = \delta_{x,y} E_x$ が成立する

[互いに直交する部分空間への射影子になっている]

~~proof (sketch)~~

~~$x = y$ のときは明らか~~

~~$x \neq y$ のとき~~

$$\cancel{E_x E_y = E_x \left(I - \sum_{z \neq y} E_z\right)}$$

$$\cancel{= E_x - E_x \sum_{z \neq y} E_z}$$

Lem $M=\{M_x\}_{x\in\mathcal{X}}$ が PVM のとき

$$(*) \quad M_x M_y = \delta_{x,y} M_x \quad (x, y \in \mathcal{X})$$

proof 各 x について M_x は射影子なので

$x=y$ のときは $M_x^2 = M_x$ で $(*)$ が成立

よって以下では $x \neq y$ とする。

POVM の条件 $\sum_{x'\in\mathcal{X}} M_{x'} = I$ より

$$I - M_x = \sum_{x'\neq x} M_{x'} \geq M_y \geq 0$$

が成りたつ。 $M_x \geq 0$ も成りたつので,

$$\mathrm{Tr}\, M_x(I-M_x) \geq \mathrm{Tr}\, M_x M_y \geq 0 \quad \text{①}$$

ただし, 以下の性質を用いた

Lem (1) $A\geq 0$, $B\geq 0$ のとき

$\mathrm{Tr}\, AB \geq 0$ (等号成立 $\Leftrightarrow AB=0$)

(5/13 に示した)

Lem(2) $A\geq 0$, $B\geq C$ のとき

$\mathrm{Tr}\, AB \geq \mathrm{Tr}\, AC$ (等号成立 $\Leftrightarrow AB=AC$)

$\because$ $\mathrm{Tr}\, AB - \mathrm{Tr}\, AC = \mathrm{Tr}\, A(B-C) \geq 0$

等号成立 $\Leftrightarrow A(B-C)=0 \Leftrightarrow AB=AC$

一方で, $\mathrm{Tr}\, M_x(I-M_x) = \mathrm{Tr}(M_x - \underbrace{M_x^2}_{=M_x}) = 0$

が成りたつので ① より

$$\mathrm{Tr}\, M_x M_y = 0$$

Lem (1) の等号成立条件より

$$M_x M_y = 0 \qquad \square$$

$$\cancel{= E_x - E_x^2 = \sum_{z \neq x,\, z \neq y} E_x E_z}$$

証明はWebにup

3-10 オブザーバブル Observalle

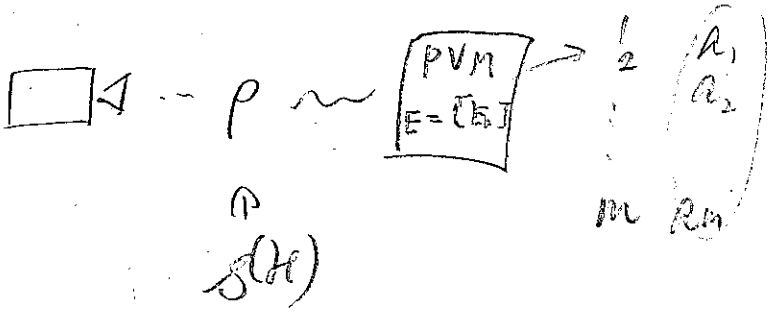
エルミート作用素Aをオブザーバブルと呼ぶ

以下の理由による

$$A = \sum_{k=1}^{m} a_k E_k \quad (\text{スペクトル分解})$$

3-8より $\sum_{k=1}^{m} E_k = I$

なので $E = \{E_k\}_{k=1}^{m}$ はPVMになる



← 物理量として実数値が測定される

上のような実数値が得られる測定

$$E = \{E_i\}_{i=1}^{m}, \quad \{a_k\}_{k=1}^{m} \ \text{実数値}$$

をオブザーバブルと言う。

$\updownarrow$ 1対1 対応 one to one

$$A = \sum_{k=1}^{m} a_k E_i$$

エルミート作用素

3-11 エルミート作用素の関数

Def A：エルミート作用素

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (実数値関数)

$f(x) \in \mathbb{R}$

$$A = \sum_{k=1}^{m} a_k E_k \quad (スペクトル分解)$$

$$f(A) := \sum_{k=1}^{m} f(a_k) E_k$$ で作用素を定義する.

$f(x) = x^2$ のとき

$$f(A) = \sum_k a_k^2 E_k$$

$f(A) = A^2$ であってほしい

$$A^2 = \left(\sum_k a_k E_k\right)\left(\sum_\ell a_\ell E_\ell\right)$$

$$= \sum_k \sum_\ell a_k a_\ell \underbrace{E_k E_\ell}_{\delta_{k,\ell} E_k}$$

$$= \sum_k a_k^2 E_k$$

同様に $f(x) = x^n$ $(n=0,\cdots)$ とするとき

$$f(A) = A^n$$ が確かめられる

さらに $f(x) = \sum_n^{\infty} c_n x^n$

とテーラー展開されるとき

$$f(A) = \sum_n^{\infty} c_n A^n$$

3-12 同時測定可能性

準備 $A = \sum_{k=1}^{m} a_k E_k$ (エルミート作用素のスペクトル分解)

このとき $k=1,2,\cdots,m$ について

関数 $f_k(x)$ が存在して

$$f_k(A) = E_k \quad (k=1,\cdots m)$$

proof

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & x = a_k \\ 0 & x = a_\ell \quad (\ell \neq k) \end{cases}$$

となる関数を作ればよい

これは以下でよい

$$f_k(x) = \frac{\prod_{\ell\neq k}(x - a_\ell)}{\prod_{\ell\neq k}(a_k - a_\ell)} \quad (k=1,2\cdots m)$$

□