3-12 同時測定可能性

Thm　A, B をオブザーバブル（エルミート作用素）

$$A = \sum_i a_i E_i \quad , \quad B = \sum_j b_j F_j$$

をスペクトル分解とする．

注：$E = \{E_i\}$，$F = \{F_i\}$ はPVM．

このとき，以下は同値．

(1) A, B は可換．$(AB = BA)$

(2) E_i, F_j は可換　$(\forall i, \forall j)$

(3) あるPVM　$G = \{G_{ij}\}$ が存在して，

$$E_i = \sum_j G_{i,j} \ , \ F_j = \sum_i G_{i,j}.$$

remark．(3)について

$\forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$

$$\begin{cases} P_\rho^E(i) = \sum_j P_\rho^G(i,j) \\ P_\rho^F(j) = \sum_i P_\rho^G(i,j) \end{cases}$$ と同値．

$P_\rho^G(i,j) = \mathrm{Tr}\, \rho G_{i,j}$　状態 ρ，測定 G．値 (i,j) が得られる確率

Proof　(1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1)

(1) ⇒ (2)

(1)⇒(2)

$$E_i = f_i(A) = \sum_k \alpha_{i,k} A^k$$

Aの多項式

$$F_i = g_j(B) = \sum_l \beta_{j,l} B^l$$

と書ける.

$$E_i F_j = \left(\sum_k \alpha_{i,k} A^k \right)\left(\sum_l \beta_{j,l} B^l \right)$$

$$= \sum_{k,l} \alpha_{i,k} \beta_{j,l} A^k B^l \qquad ((1)\ AB = BA\ \text{より})$$

$$= \sum_{k,l} \alpha_{i,k} \beta_{j,l} B^l A^k$$

$$= F_j E_i$$

(2)⇒(3)

$G_{i,j} = E_i F_j$ とおく.

$\{G_{i,j}\}$はPVMか?　$G_{i,j}$は射影子か?

・$G_{i,j}^* = (E_i F_j)^*$

$= F_j^* E_i^*$　(E_i, F_jが射影子であることより)

$= F_j E_i$　(E_i, F_jが可換であることより (2))

$= E_i F_j = G_{i,j}$

∴ $G_{i,j}$ はエルミート

・$G_{i,j}^2 = (E_i F_j)(E_i F_j)$　((2)より)

$= E_i E_i F_j F_j$

$= E_i^2 F_j^2$　(E_i, F_jが射影子であることより)

$= E_i F_j = G_{i,j}$

$\therefore$ $G_{i,j}$ は射影子

・ $G = \{G_{i,j}\}$ は POVMか?

$$\sum_{i,j} G_{i,j} = \sum_{i,j} E_i F_j$$ E_i, F_j が可換であることより.

$$= \left(\sum_i E_i\right)\left(\sum_j F_j\right)$$

$$= I$$

$\therefore$ G は POVM

$\therefore$ G は PVM

(3) ⇒ (1)

$$A = \sum_i a_i E_i = \sum_i a_i \sum_j G_{i,j} = \sum_{i,j} a_i G_{i,j}$$

$$B = \sum_j b_j F_j = \sum_j b_j \sum_i G_{i,j} = \sum_{i,j} b_j G_{i,j}$$

PVMの性質より

$$G_{i,j} G_{k,l} = \begin{cases} G_{i,j} & (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

特に可換

$$AB = \left(\sum_{i,j} a_i G_{i,j}\right)\left(\sum_{i',j'} b_{j'} G_{i',j'}\right)$$

$$= \sum_{i,j,i',j'} a_i b_{j'} G_{i,j} G_{i',j'} = \sum_{i,j,i',j'} a_i b_{j'} G_{i',j'} G_{i,j} = BA.$$

$\therefore$ A, B は可換

3. 合成系

3-1. テンソル積空間

V_1, V_2 ：ベクトル空間

次の性質を満たす射像

$$\otimes : \begin{array}{ccc} (\varphi, \psi) & \longmapsto & \varphi \otimes \psi \\ \cap & & \cap \\ V_1 \times V_2 & \longrightarrow & W \end{array}$$
W ：ベクトル空間

とベクトル空間 W の組 $(\otimes, W)$ をテンソル積空間と呼ぶ.
ただし, 射像 $\otimes$ は,

(i) $\otimes$ は双線形

i.e.
$\forall \psi \in V_2$ について,
$\varphi \longmapsto \varphi \times \psi$
は線形 かつ
$\forall \varphi \in V_1$ について
$\psi \longmapsto \varphi \times \psi$
は線形

→

$$\varphi \otimes (\alpha \psi_1 + \beta \psi_2) = \alpha \varphi \otimes \psi_1 + \beta \varphi \otimes \psi_2$$

$$(\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2) \otimes \psi = \alpha \varphi_1 \otimes \psi + \beta \varphi_2 \otimes \psi$$

α, β はスカラー

(ii) $\{e_i\}$ を V_1 の基底, $\{f_j\}$ を V_2 の基底とする. このとき,
$\{e_i \otimes f_j\}$ は W の基底となる.

をみたすものとする.

Fact.

テンソル積空間は、線形同型を除いて一意。

テンソル積は常に作れる。

例

$V_1 = \mathbb{C}^2,\ V_2 = \mathbb{C}^3$

ここで、 $\varphi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \psi = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

に対して、

$$\varphi \otimes \psi := \begin{pmatrix} a_1\psi \\ a_2\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 \\ a_1b_2 \\ a_1b_3 \\ a_2b_1 \\ a_2b_2 \\ a_2b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 = W.$$

：クロネッカー積

とすると、$(\otimes, W)$ はテンソル積空間となる。

・双線形性は、自明。

・基底の性質　$\mathbb{C}^2$の基底として $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$　$\mathbb{C}^3$のそれとして、$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

とする。このとき、

クロネッカー積

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と$\mathbb{C}^6$の基底となっている。

一方、
$$\varphi \otimes' \psi := \begin{pmatrix} b_1 \varphi \\ b_2 \varphi \\ b_3 \varphi \end{pmatrix}$$
とすると、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり、やはり$\mathbb{C}^6 = W$の基底となっている　$\therefore \otimes'$もテンソル積

$\otimes$と$\otimes'$は基底の対応を除いて、同じものと考える（一意）

以降では　テンソル積$(\otimes, W)$を$W \equiv V_1 \otimes V_2$とかく。

$$V_1 \otimes V_2 = \left\{ \sum_i \sum_j C_{ij}\, e_i \otimes f_j \;\middle|\; \{e_i\}\text{は}V_1\text{の基底}, \{f_j\}\text{は}V_2\text{の基底}, C_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

Def

$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$をHilbert空間とする。

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$は内積　$u, \varphi \in \mathcal{H}_1$, $v, \psi \in \mathcal{H}_2$　$\{C_{ij}\} \in \ell^2$

$$\langle u \otimes v, \varphi \otimes \psi \rangle_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} = \langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle v, \psi \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

を持つHilbert空間であるとする。

- $\dim V_1 \otimes V_2 = (\dim V_1)(\dim V_2)$

3-2 作用素のテンソル積

予告

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad m \times m \text{ 行列}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix} \quad n \times n \text{ 行列}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}B & \cdots & a_{mm}B \end{pmatrix} \quad mn \times mn \text{ 行列}$$

クロネッカー積