review

$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilbert space

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \{ \sum c_{ij} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \mid c_{ij} \in \mathbb{C} \}$$

$\{|e_i\rangle\}$: $\mathcal{H}_1$ の ONS

$\{|f_j\rangle\}$: $\mathcal{H}_2$ の ONS

3-2 作用素のテンソル積

$A : \mathcal{H}_1 \to K_1$

$B : \mathcal{H}_2 \to K_2$

linear operator

に対して $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_2$ として,

$$(A \otimes B)(\underbrace{|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle}_{\in\, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}) \overset{\text{def}}{=} \underbrace{A|\varphi\rangle \otimes B|\psi\rangle}_{\in\, K_1 \otimes K_2}$$

を線形拡大して,

$$A \otimes B : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \xrightarrow{\text{linear}} K_1 \otimes K_2$$

を定義する.

[・基底 $|e_i\rangle \otimes |f_k\rangle$ ($|e_i\rangle$: $\mathcal{H}_1$ の基底, $|f_k\rangle$: $\mathcal{H}_2$ の基底)

の行き先が定まっているので, 全ての $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の要素に対して定まっている.]

テンソル積の性質

(1) $(A\otimes B)(C\otimes D) = AC \otimes BD$

(2) $(A\otimes B)^* = A^* \otimes B^*$

$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ のとき,

(3) $\mathrm{Tr}(A\otimes B) = (\mathrm{Tr}A)(\mathrm{Tr}B)$

(4) $A|\varphi\rangle = a|\varphi\rangle$, $B|\psi\rangle = b|\psi\rangle$

(固有値, 固有ベクトル)

$$\Rightarrow (A\otimes B)(|\varphi\rangle\otimes|\psi\rangle) = \underbrace{ab}_{\text{固有値}}\underbrace{(|\varphi\rangle\otimes|\psi\rangle)}_{\text{固有ベクトル}}$$

(5) $A \geq 0$, $B \geq 0 \Rightarrow A\otimes B \geq 0$.

∵ $A = C^*C$, $B = D^*D$

より $A\otimes B = (C\otimes D)^*(C\otimes D) \geq 0$.

固有値を考えてもよい.

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上の作用素

$$(\underbrace{|\varphi\rangle\otimes|\psi\rangle}_{\text{ケット}})(\underbrace{\langle u|\otimes\langle v|}_{\text{ブラ}}) \quad \text{operator}$$

$$= |\varphi\rangle\langle u| \otimes |\psi\rangle\langle v|$$

$\mathcal{H}_1$ の ONS $|e_i\rangle$

$\mathcal{H}_2$ の ONS $|f_k\rangle$

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上の operator X は $\in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$

$$X = \sum_{ijkl} x_{ijkl} |e_i\rangle\langle e_j| \otimes |f_k\rangle\langle f_l|$$

(∵) $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$$A = \sum_{ij} \langle e_i | A | e_j \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ONS}}}{|e_i\rangle\langle e_j|}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum a_{ij} \begin{array}{c} \quad j \\ i \begin{pmatrix} 0 & \vdots & \\ \cdots & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \quad\quad j \\ \quad\quad \downarrow \\ (0 \cdots 0\,1\,0 \cdots 0) \end{array}$$

$$= |e_i\rangle\langle e_j|$$

このルールを $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の ONS $\{|e_i\rangle \otimes |f_k\rangle\}$ に対して考える.

$|e_i\rangle\langle e_j|$ に相当するもの:

$$(|e_i\rangle \otimes |f_k\rangle)(\langle e_j| \otimes \langle f_l|) = |e_i\rangle\langle e_j| \otimes |f_j\rangle\langle f_l|$$

∴ $|e_i\rangle\langle e_j| \otimes |f_j\rangle\langle f_l|$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ の基底 となっている.

3-3 合成系
composite system

(1) Hilbert space $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$

で記述される系の合成系は，$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ で記述される．

すなわち 状態 $\rho_{AB} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$

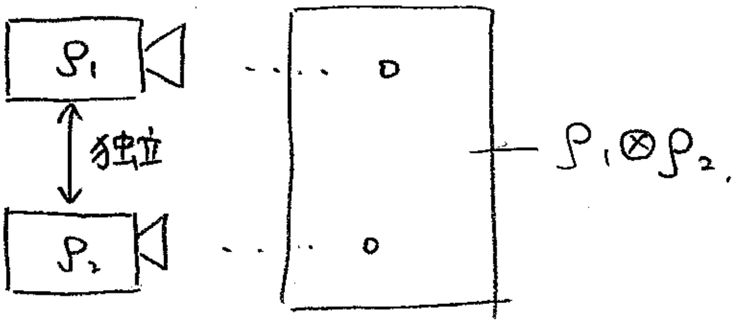
測定 POVM on $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

で記述される．

(2) 系1の状態 $\rho_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$

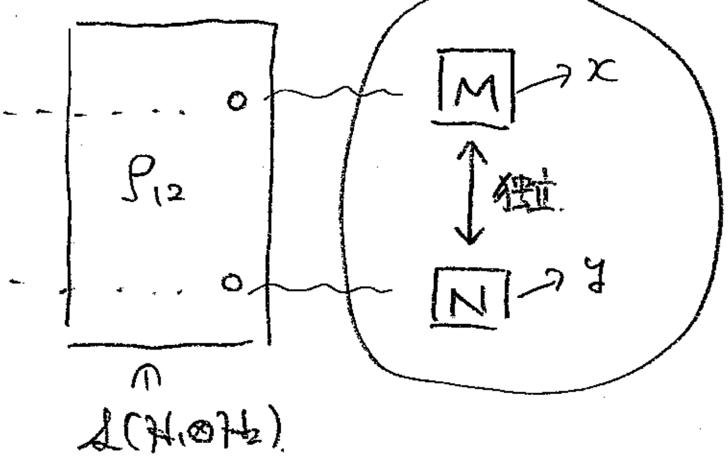
系2の状態 $\rho_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$

が独立に準備される時，合成系の状態は $\rho_1 \otimes \rho_2$ となる．



(3) 系1の測定 POVM $M = \{M_x\}_{x \in \mathcal{X}}$

系2の測定 POVM $N = \{N_y\}_{y \in \mathcal{Y}}$



POVM $\{M_x \otimes N_y\}_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$

は、合成系のPOVMとして、

$$X = \{ M_x \otimes N_y \}_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$$

と書ける。

例　独立に粒子を発生させ、独立に測定することを考える。
・確率が独立となっているはず!!

$$P_X^{\rho_1 \otimes \rho_2}(x,y) = \mathrm{Tr}[(\rho_1 \otimes \rho_2)(M_x \otimes N_y)]$$
$$= \mathrm{Tr}[\rho_1 M_x \otimes \rho_2 N_y]$$
$$= \mathrm{Tr}[\rho_1 M_x]\,\mathrm{Tr}[\rho_2 N_y]$$
$$= P_M^{\rho_1}(x)\,P_N^{\rho_2}(y).$$

(3)において、特に $\mathcal{H}_2$ の測定を行わないとき
$\shortparallel$
常に同じ目盛りを指すPOVMで測定する。
yの値の個数が1、足すと単位行列より
$N = \{I\}$.

このとき、合成系のPOVMは、

$$X = \{ M_x \otimes I \}_{x \in \mathcal{X}}$$

3-4 部分トレース
partial trace.

※確率論: 周辺化, 周辺分布.

確率論では, 周辺分布.

$$p(x,y) \longrightarrow p(x) = \sum_y p(x,y).$$

Def.

$X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ に対して, 部分トレースを以下で定義する.

(1) $X = X_A \otimes X_B$ のとき,

$$\underbrace{\mathrm{Tr}_B}_{\text{Bをトレースアウトする}} X = (\mathrm{Tr} X_B) X_A.$$

(2) 一般のとき,

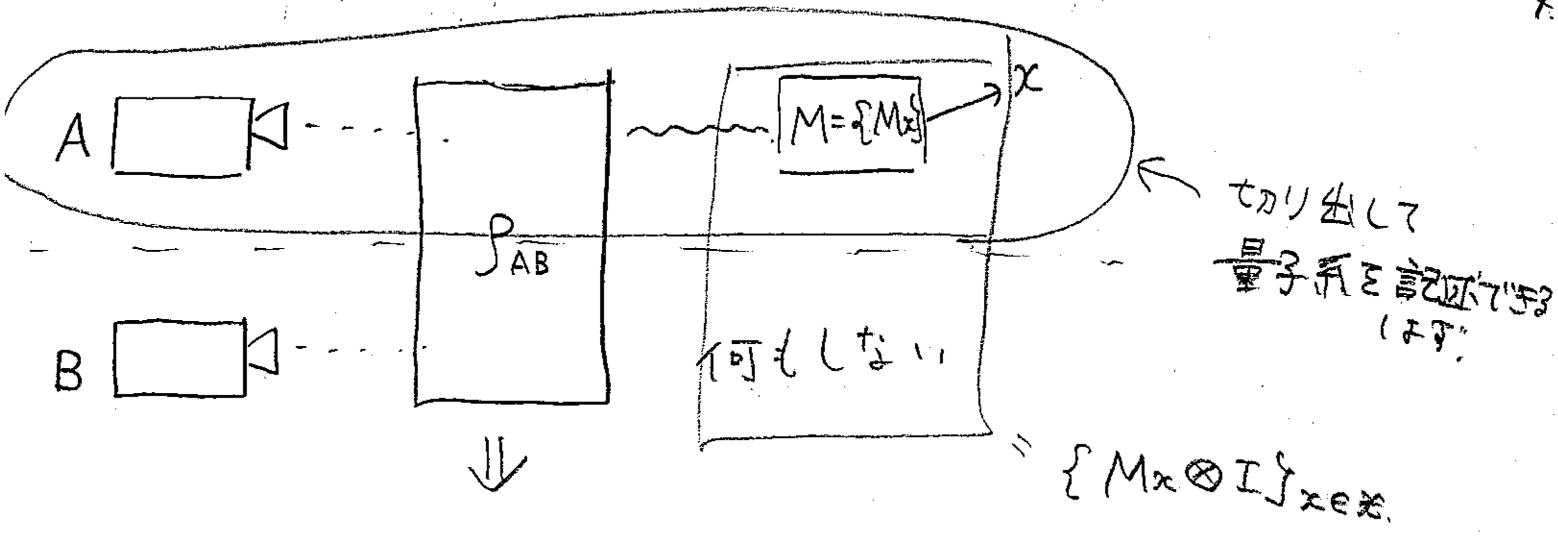
$$X = \sum_{ijkl} x_{ijkl} \underbrace{|e_i\rangle\langle e_j| \otimes |f_k\rangle\langle f_l|}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)\text{の基底}}$$

$\cap$

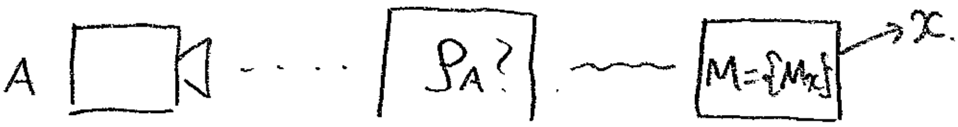
$\mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$

$$\mathrm{Tr}_B X = \sum_{i,j,k,l} x_{ijkl} |e_i\rangle\langle e_j| \cdot \underbrace{\mathrm{Tr}|f_k\rangle\langle f_l|}_{\mathrm{Tr}\langle f_l|f_k\rangle = \delta_{kl}}$$

$$= \sum_{i,j,k} x_{ijkk} |e_i\rangle\langle e_j|$$



$\Downarrow$



$$P_x^{\rho_{AB}} = \mathrm{Tr}[\rho_{AB}(M_x \otimes I)]$$

$$= \mathrm{Tr}[\boxed{\rho_A} M_x] = P_M^{\rho_A}(x)$$

$\in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$

こうなる ρ_A があるはず.

実際に.

$\rho_A = \mathrm{Tr}_B\ \rho_{AB}$?

<u>Lemma.</u> $X_{AB} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ $Y_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$

$$\mathrm{Tr}[X_{AB}(Y_A \otimes I)] = \mathrm{Tr}\, X_A Y_A$$

where, $X_A = \mathrm{Tr}_B X_{AB}$.

<u>proof.</u> 両辺は X_{AB} に対して linear.

よって $X_{AB} = \tilde{X}_A \otimes \tilde{X}_B$ のみ確かめれば線形性より一般的な式が導びかれる

$$(\text{左辺}) = \mathrm{Tr}[(\tilde{X}_A \otimes \tilde{X}_B)(Y_A \otimes I)]$$
$$= \mathrm{Tr}[\tilde{X}_A Y_A \otimes \tilde{X}_B]$$
$$= \mathrm{Tr}[\tilde{X}_A Y_A]\,\mathrm{Tr}[\tilde{X}_B]$$

$$X_A = \mathrm{Tr}_B X_{AB} = \mathrm{Tr}_B(\tilde{X}_A \otimes \tilde{X}_B)$$
$$= \mathrm{Tr}[\tilde{X}_B]\,\tilde{X}_A.$$

よって

$$(\text{右辺}) = \mathrm{Tr}[X_A Y_A]$$
$$= \mathrm{Tr}[\tilde{X}_B]\,\mathrm{Tr}[\tilde{X}_A Y_A] = (\text{左辺})$$

部分トレース

$\rho_A = \mathrm{Tr}_B\, \rho_{AB}$. ：・合成系の状態 ρ_{AB} から系 $\mathcal{H}_A$ だけの実験についての状態を取り出したもの.

・系 $\mathcal{H}_A$ だけで記述を閉じさせた状態.

部分トレースの性質

(1) $\mathrm{Tr}_{AB} X_{AB} = \mathrm{Tr}_A(\underbrace{\mathrm{Tr}_B X_{AB}}_{\in\, \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)})$

(2) $(\underbrace{\mathrm{Tr}_B X_{AB}}_{\in\, \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)})^* = \mathrm{Tr}_B\, X_{AB}^*$

(3) $X_{AB} \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}_B X_{AB} \geq 0$.

これらより $\rho_{AB} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) \Rightarrow \rho_A = \mathrm{Tr}_B\, \rho_{AB} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$