3-5 極分解と特異値分解

Lem

$A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$

$B : \mathcal{H} \to \mathcal{K}'$

$A^*A = B^*B$

$\Leftrightarrow \exists V$: partial isometry $\quad A = VB$

Def (isometry 等距離作用素)

$V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ が isometry

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle Vx, Vy \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, V^*Vy \rangle = \langle x, Iy \rangle$$

$\Leftrightarrow V^*V = I_{\mathcal{H}}$

Def (Unitary 作用素)

$U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ が unitary

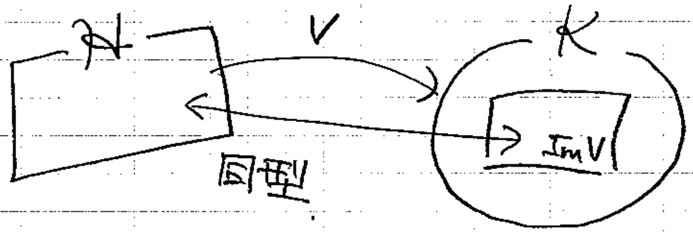
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ U が isometry かつ $\mathrm{Im}\, U = \mathcal{K}$

Def (partial isom. 部分等距離作用素)

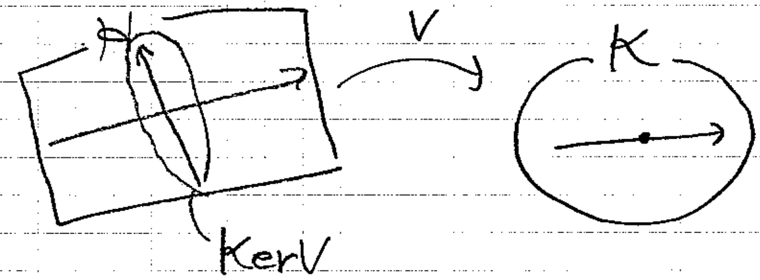
$V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ が partial isom.

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ V を $(\mathrm{Ker}\, V)^\perp$ に制限すると isom.

isom.



$\mathcal{H}$のKへの埋めこみ.



proof

$A^*A = B^*B \iff \exists$ partial isom V. $A = VB$ $(\mathrm{Ker}V)^\perp \supset \mathrm{Im}B$

(⇐)

$$\begin{aligned} A^*A &= (VB)^*(VB) \\ &= B^*V^*VB \\ &= B^*P(\mathrm{Ker}V^\perp)B \\ &= B^*B. \end{aligned}$$

(⇒)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}\ni x \arrow[r, "B"] \arrow[dr, "A"'] & y = Bx \in \mathrm{Im}B \arrow[d, "V?"] \\ & z = Ax \in \mathrm{Im}A. \end{tikzcd}$$

$\forall x, x' \in \mathcal{H}$

$$\langle Ax, Ax' \rangle = \langle Bx, Bx' \rangle$$

$$\because \langle Ax, Ax' \rangle = \langle x, A^*Ax' \rangle = \langle x, B^*Bx' \rangle = \langle Bx, Bx' \rangle$$

特に　$x' = x$ として

$$\underset{z}{\|Ax\|} = \underset{y}{\|Bx\|}$$

よって

$$\|Ax - Ax'\| = \|Bx - Bx'\|$$

これより $V|_{\mathrm{Im}B}$ は写像になる。

一方、作り方により、V の線形性は明らか。

$\langle Ax, Ax' \rangle = \langle Bx, Bx' \rangle$ より、$V|_{\mathrm{Im}B}$ は $\mathrm{Im}B$ から $\mathrm{Im}A$ への isometry (Unitary)

そこで、これを K' へ拡大し、

$$V: \mathrm{Im}B \to \mathrm{Im}A \qquad \mathrm{Im}B = (\mathrm{Ker}V)^{\perp}$$

$$y = Bx \mapsto z = Ax$$

$$(\mathrm{Im}B)^{\perp} \to K' \qquad (\mathrm{Im}B)^{\perp} = \mathrm{Ker}V$$

$$\underset{y}{\cup} \longmapsto 0$$

作り方より、V は partial isom.

$$A = VB. \qquad (\mathrm{Ker}V)^{\perp} = \mathrm{Im}B.$$

<u>remark</u>

$(\mathrm{Ker}V)^{\perp} = \mathrm{Im}B$ となる partial isom. V は一意.

Thm. (極分解 porlar decomposition)

$A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ に対し,

$\exists V$: partial isom.

ただし,

$$|A| \overset{\mathrm{def}}{=} \underset{\substack{\vee\!| \\ 0}}{\sqrt{A^*A}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

※ determinant ではない.

<u>proof</u>

$B = |A|$ とおく.

$B^*B = A^*A$ となる. よって Lem より.

$\exists V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ partial isom.

$$A = VB = V|A|$$

$\lrcorner$

<u>remark</u>

(1) V は $(\mathrm{Ker}\,V)^{\perp} = \mathrm{Im}\,|A|$ の条件のもとで一意.

(2) 有限次元の場合 V を ユニタリにとることができる

Thm (特異値分解 singular value decomposition) SVD

A : $m \times n$ 行列に対し,

$$ {}_{m}\overset{n}{A} = {}_{m}\overset{m}{U}\, \Lambda\, {}^{n}\overset{n}{V}$$

となるユニタリ行列 U, V が存在.

$$\Lambda = \begin{array}{c} \\ m \end{array} \overset{n}{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & \lambda_r & \\ & & & 0 \quad 0 \\ 0 & & 0 & 0 \quad 0 \end{pmatrix}}$$

A と同じ大きさ.

etc.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_r > 0$$

Thm SVD その2.

$A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ linear

$\{|e_i\rangle\}$ ONS on $\mathcal{H}$.

$\{|f_j\rangle\}$ ONS on $\mathcal{K}$

$A = U \Lambda V$ となる.

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k |f_k\rangle\langle e_k|$$

$\lambda_1, \cdots \lambda_r > 0$.

U, V : partial isom. で適切なもの.

(proof) sketch.

$$A = V|A|$$
$$\quad\;\; \| $$
$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i |a_i\rangle\langle a_i| \qquad \lambda_i > 0. \qquad r := \mathrm{rank}|A|$$

$|b_i\rangle = V|a_i\rangle$ とおくと.

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i |b_i\rangle\langle a_i|.$$

choose U_1, U_2 : unitary.

$U_1|a_i\rangle = |e_i\rangle$

$U_2|b_i\rangle = |f_i\rangle$ $\square$

3-6, 同型対応

$$\mathcal{H}\otimes\mathcal{K} \simeq \mathcal{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$$

$\{|e_i\rangle\}$ ONS on $\mathcal{H}$.

$\{|f_j\rangle\}$ ONS on $\mathcal{K}$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}\otimes\mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{K};\mathcal{H}) \\
\Psi & & \Psi \\
\sum_{ij} a_{ij}|e_i\rangle\otimes|f_j\rangle & \longmapsto & \sum_{ij} a_{ij}|e_i\rangle\langle f_j| \\
\parallel & \text{linear 同型} & \parallel \\
(A\otimes I)|\Phi\rangle & & A
\end{array}$$

基底に依存！

ここで,

$$|\Phi\rangle = \sum_k |f_k\rangle\otimes|f_k\rangle$$
$$\cap$$
$$\mathcal{K}\otimes\mathcal{K}.$$

特に,

$\forall |\Psi\rangle \in \mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ に対して,

$\exists!\ A\in\mathcal{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$

$$|\Psi\rangle = (A\otimes I)|\Phi\rangle \quad —(*)$$

3-7 Schmidt 分解.

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ は

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} a_{ij}\ |e_i\rangle\otimes|f_j\rangle$$ と書ける.

Thm. $\forall|\psi\rangle\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$

に対して, $|\alpha_i\rangle$ ONS on $\mathcal{H}$, $|\beta_j\rangle$ ONS on $\mathcal{K}$

を上手にとると,

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{r}\lambda_k\ |\alpha_k\rangle\otimes|\beta_k\rangle \quad (\lambda_k\ (k=1,2,\cdots,r)\ は正)$$

と書ける.

<u>proof</u> ⊛ より

$$|\psi\rangle = (A\otimes I)\,|\Phi\rangle$$

特異値分解 より

$$A = U\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{r}\lambda_k|e_k\rangle\langle f_k|}_{=\Lambda}\Big)V \qquad U,V : \text{partial isom.}$$

$$(X\otimes I)|\Phi\rangle = (I\otimes X^T)|\Phi\rangle'$$

ただし, $\sum_k |f_k\rangle\otimes|f_k\rangle = |\Phi\rangle$

$\sum |e_k\rangle\otimes|e_k\rangle = |\Phi\rangle'$

$X = \sum x_{ij}\ |e_i\rangle\langle f_j|$

$X^T = \sum x_{ij}\ |f_j\rangle\langle e_i|$

より

$$|\psi\rangle = (U\Lambda V\ \otimes I)|\Phi\rangle$$
$$= (U\Lambda\otimes V^T)\ |\Phi\rangle \quad = \Big(U\sum\lambda_k|e_k\rangle\langle f_k|\otimes V^T\Big)\sum|f_l\rangle\otimes|f_l\rangle$$
$$= \sum_k \lambda_k\ \underbrace{U|e_k\rangle}_{|\alpha_k\rangle}\otimes\underbrace{V^T|f_k\rangle}_{|\beta_k\rangle}$$