## 4/24 レポート

1. $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

(1) 一次独立(線形独立)の定義を述べよ。

(2) 基底の定義を述べよ。

(3) $1, x, x^2 \in P_2$ が $P_2$ の基底であることを示せ。
定数関数

(4) $1, (x+1), (x+1)^2$ が基底であることを示せ。

(5) $A: \underset{P_2}{\underset{\cap}{f(x)}} \longmapsto \underset{P_2}{\underset{\cap}{f'(x)}}$ について、基底 $\{1, x, x^2\}$ と基底 $\{1, (x+1), (x+1)^2\}$ に関する2通りの表現行列を求めよ。

締め切り、5月8日
授業の開始時

## 1-4. 内積とHilbert空間

V: vector space
スカラー $\mathbb{C}$
ベクトルを2つ選ぶとスカラーが定まる写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で以下を満たすものを(エルミート)内積という。

(1) $a_1, b_1 \in V$、$c_1, c_2 \in \mathbb{C}$　$a, b \in V$

$$\langle a_1, \underbrace{c_1 b_1 + c_2 b_2}\rangle = c_1 \langle a_1, b_1\rangle + c_2 \langle a_1, b_2\rangle$$

複素共役 $(\overline{x+iy} = x - iy)$　線形

(2) $\overline{\langle a, b\rangle} = \langle b, a\rangle$

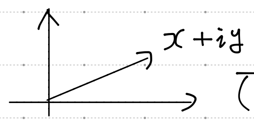
(3) $\langle a, a\rangle \geq 0$

例、 $V = \mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \middle| c_i \in \mathbb{C},\ i = 1 \cdots n \right\}$

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$　　$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}\, b_i$$

注 $\langle a, a\rangle = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\overline{a_i} a_i}_{|a_i|^2} \geq 0$




$\overline{(x+iy)}(x+iy) = x^2 + y^2$

これ以外にも内積は無数にある。

$V = \mathbb{C}^2$ のとき $(n=2)$

$\langle a, b\rangle = \bar{a}_1 b_1 + \bar{a}_2 b_2$

$\langle a, b\rangle = 2\bar{a}_1 b_1 + 3\bar{a}_2 b_2$

**Def**

Hilbert空間とは内積が1つ指定されたベクトル空間。
以降、$\mathcal{H}$ と書く。

## 1-5. braket記法 (braket notation)

「かっこ」= bracket

$\langle \quad | \quad \rangle$

bra ket

Hilbert空間 $\mathcal{H}$

内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ または, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ と書く

同じもの

約束

Hilbert空間のベクトル(要素)を $|x\rangle \in \mathcal{H}$ と書く,($x \in \mathcal{H}$ とも書く)

これを ket と呼ぶ。以下で bra $\langle \cdot |$ を定義していく。

双対ベクトル空間 (dual vector space)

$V$: ベクトル空間に対して

$V^* := \{ f : V \xrightarrow[\text{linear}]{} \mathbb{C} \}$ 汎関数 (functional)

関数のたし算

$\forall v \in V, \quad f, g \in V^*$

$\underbrace{(f+g)}_{\text{値で和を定義}}(v) := f(v) + g(v)$

関数のスカラー倍

$\forall v \in V, \ c \in \mathbb{C},$

$(cf)(v) := c \cdot f(v)$

これにより $V^*$ は和とスカラー倍に対して閉じている。

しかも, $0 \in V^*$ は

$\underset{V^*}{\underset{\cap}{(0)}}\underset{V}{\underset{\cap}{(v)}} = 0 \in \mathbb{C}$

ゼロ元になる。よって $\underbrace{V^* \text{はベクトル空間}}_{\text{dual vector space}}$

$\mathcal{H}$: Hilbert空間

$\langle \ , \ \rangle$ 内積

ベクトル $v \in \mathcal{H}$ $(|v\rangle \in \mathcal{H})$

$\langle v| = f_v : \underset{\mathcal{H}}{\underset{\cap}{|x\rangle}} \longmapsto \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{\langle v, x \rangle}}$

$\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$

$f_v \in \mathcal{H}^*$ ($\mathcal{H}$の dual vector space の要素)

これを $\langle v|$ と書く bra

Remark $\mathcal{H}^* \approx \mathcal{H}$ (Hilbert空間の場合)

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$$

$$\boxed{\underset{\text{ket}}{|y\rangle} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}} \longleftrightarrow \boxed{\underset{\text{bra}}{\langle y|} = (\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_n)}$$

複素共役，転置

$$\langle y|x\rangle = (\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i x_i$$

$|x\rangle\langle y|$ も意味をもつ。

$$\underbrace{|x\rangle\langle y|}_{\text{線形写像}} : |z\rangle \xmapsto{\text{linear}} |x\rangle\underbrace{\langle y|z\rangle}_{\text{内積}}$$

$|z\rangle \in \mathcal{H}$

線形写像 (linear operator) = 行列

ベクトル $|x\rangle \in \mathcal{H}$

$$|x\rangle\langle y| = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}(\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_n) = \begin{pmatrix} x_1\bar{y}_1 & \cdots & x_1\bar{y}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n\bar{y}_1 & \cdots & x_n\bar{y}_n \end{pmatrix}$$

$n \times n$ 行列

$$\mathrm{rank}(|x\rangle\langle y|) = \dim\underbrace{\{c|x\rangle \mid c \in \mathbb{C}\}}_{\mathrm{Im}\,|x\rangle\langle y|} = 1$$

※ $|x\rangle$ のスカラー倍しか動かない

cf. $\mathrm{rank}\,A = \dim \mathrm{Im}\,A$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

3角化したときの1の数

## 2. Hilbert空間上の operator

$$A : \mathcal{H} \xrightarrow{\text{linear}} \mathcal{H}$$

$$|x\rangle \longmapsto A|x\rangle$$

線形作用素を単に作用素(operator)と呼ぶ。

### 2-1. リースの表現定理

<u>例</u> $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$

内積 $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$

$\mathcal{H}$ 上の線形汎関数

$$f : |x\rangle \xmapsto{\text{linear}} f(x)$$

$|x\rangle \in \mathcal{H}$, $f(x) \in \mathbb{C}$

これは $f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ と書ける。

∵ 線形性より $(x_1 \cdots x_n)$ の1次式

$f(|0\rangle) = 0 \longrightarrow$ 定数項 $= 0$

ここで，$|y_f\rangle = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \vdots \\ \bar{w}_n \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\langle y_f | x\rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = f(x)$$

と書ける。

**リースの表現定理**

> 線形汎関数 $f$
>
> ↓
>
> ベクトル $\exists |y_f\rangle \in \mathcal{H}$ (1通りに定まる)
>
> $\forall x \in \mathcal{H}$, $f(x) = \langle y_f | x\rangle$