4-6 同時対応 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}\simeq\mathcal{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$

$\{|e_i\rangle\}$ ONS on $\mathcal{H}$
$\{|f_j\rangle\}$ ONS on $\mathcal{K}$

$$\underset{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}}{\sum_{i,j} a_{ij}\underbrace{|e_i\rangle\otimes|f_j\rangle}_{\text{ONS}}} \xmapsto[\text{linear 同型}]{\text{全単射}} \underset{\mathcal{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})}{\sum_{i,j} a_{ij}\underbrace{|e_i\rangle\langle f_j|}_{\text{ONS}}} = A$$

flip

$\{|e_i\rangle\otimes|f_j\rangle\}$ は $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ の ONS
$\{|e_i\rangle\langle f_j|\}$ は $\mathcal{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ の ONS
この対応は線形同型なので、両者を同一視できる。
ここで

$$|\Phi\rangle = \sum_k |f_k\rangle\otimes|f_k\rangle \in \mathcal{K}\otimes\mathcal{K}$$

とおくと、

$$(A\otimes I_K)|\Phi\rangle = \left\{\left(\sum_{i,j} a_{ij}|e_i\rangle\langle f_j|\right)\otimes I_K\right\}\left(\sum_k |f_k\rangle\otimes|f_k\rangle\right)$$
$$= \sum_{i,j} a_{ij}|e_i\rangle\otimes|f_j\rangle$$

($A\in\mathcal{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$)

これで同型対応(の逆写)が得られた。
特に $\forall|\psi\rangle\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ に対して

$\exists A\in\mathcal{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ (唯一存在) , $|\psi\rangle = (A\otimes I)|\Phi\rangle$

同一視

remark

これは vec 演算子に外ならない。

$$\mathrm{vec}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \quad (\text{行列をベクトルに})$$

m, n, $m\times n$, 1

remark

この同型対応は
$\{|e_i\rangle\}\{|f_j\rangle\}$: ONS
に依存する。

4-7 シュミット分解

$\forall|\psi\rangle\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ は

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|e_i\rangle\otimes|f_j\rangle \quad (m\times n\text{個の和})$$

と書ける。

Thm

$\forall|\psi\rangle\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ に対して
$|\alpha_i\rangle$ ONS on $\mathcal{H}$
$|\beta_j\rangle$ ONS on $\mathcal{H}$
を上手にとると、

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{r}\lambda_k|\alpha_k\rangle\otimes|\beta_k\rangle \quad (\lambda_k\ (k=1\cdots r)\text{は正})$$

と書ける。r は $|\psi\rangle$ に対して一意に定まる。 ($r\leq m,\ r\leq n$)

証明

$$|\psi\rangle = (A\otimes I)|\Phi\rangle$$

となる $A\in\mathcal{L}(K;\mathcal{H})$ が唯一存在。

特異値分解(その2)より、

$$A = U\Big(\underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{r}\lambda_k|e_k\rangle\langle f_k|}}_{\Lambda}\Big)V$$

となるユニタリ U, V が存在

$$r = \mathrm{rank}\,A$$

よって

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= (A\otimes I)|\Phi\rangle \\
&= (U\Lambda V\otimes I)|\Phi\rangle \\
&= (U\Lambda\otimes I)\underbrace{(V\otimes I)|\Phi\rangle}_{(I\otimes V^T)|\Phi\rangle} \qquad V^T:\text{ユニタリ} \\
&= (U\Lambda\otimes V^T)\underbrace{|\Phi\rangle}_{\sum_\ell |f_\ell\rangle\otimes|f_\ell\rangle} \\
&= \sum_{\ell}^{\dim K} \underbrace{U\Lambda|f_\ell\rangle}_{\lambda_\ell|e_\ell\rangle} \otimes V^T|f_\ell\rangle \qquad (\ell > r \to 0)\quad \ell\le r \\
&= \sum_{\ell=1}^{r}\lambda_\ell\,\underbrace{U|e_\ell\rangle}_{|\alpha_\ell\rangle}\otimes\underbrace{V^T|f_\ell\rangle}_{|\beta_\ell\rangle} \\
&= \sum_k \lambda_k|\alpha_k\rangle\otimes|\beta_k\rangle
\end{aligned}$$

4-8 エンタングルメント(量子力学的相関)(量子もつれ)

Def

$$\rho_{AB}\in S(\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B)$$

がエンタングル状態

$$\Longleftrightarrow\quad \rho_{AB} = \sum_i p_i\,\underset{\substack{\cap\\ S(\mathcal{H}_A)}}{\sigma_i^A}\otimes\underset{\substack{\cap\\ S(\mathcal{H}_B)}}{\sigma_i^B}$$

の形に書けない。

純粋状態の場合

$$\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$$

$$|\psi_{AB}\rangle\in\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B$$

と書ける。シュミット分解より

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{k=1}^{r}\underbrace{\sqrt{p_k}}_{\lambda_k}\,|e_k\rangle\otimes|f_k\rangle$$

と書ける。　　p_k:確率

よって

$r=1$ のとき エンタングルしていない　(テンソル積状態)

$r\ge 2$ のとき エンタングルしている

特に

$$|\Phi_{AB}\rangle = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}|e_k\rangle\otimes|f_k\rangle$$

を最大エンタングル状態(maximally entangled state)という。

単に $|\Phi\rangle$ とも書く。

4-9 maximally entangled state

$$A = \sum_{ij} a_{ij} |e_i\rangle\langle f_j|$$

$$A^T := \sum_{ij} a_{ij} |f_j\rangle\langle e_i|$$

このとき、

$$(A\otimes I)\underbrace{|\Phi\rangle}_{\sum_k |f_k\rangle\otimes|f_k\rangle} = (I\otimes A^T)\underbrace{|\Phi'\rangle}_{\sum_k |e_k\rangle\otimes|e_k\rangle}$$

証明

(左辺) $= \sum_{ij} a_{ij} |e_i\rangle\otimes|f_j\rangle$

(右辺) $= (I\otimes A^T)|\Phi'\rangle$

$$= \sum_k I|e_k\rangle\otimes\underbrace{A^T|e_k\rangle}_{\sum_j a_{kj}|f_j\rangle}$$

$$= \sum_k\sum_j a_{kj}|e_k\rangle\otimes|f_j\rangle$$

= (左辺) □

$\mathcal{H}_A \simeq \mathcal{H}_B$ として $|e_k\rangle = |f_k\rangle$ とすると、

$$(A\otimes I)|\Phi\rangle = (I\otimes A^T)|\Phi\rangle$$

Lem

任意の ONS $|e_i'\rangle$ on $\mathcal{H}_A$ に対して ONS $|f_i'\rangle$ on $\mathcal{H}_B$ が存在して

$$|\Phi_{AB}\rangle = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}|e_k\rangle\otimes|e_k\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}|e_i'\rangle\otimes|f_i'\rangle$$

証明

$$|e_k'\rangle = U|e_k\rangle \quad (\forall k)$$

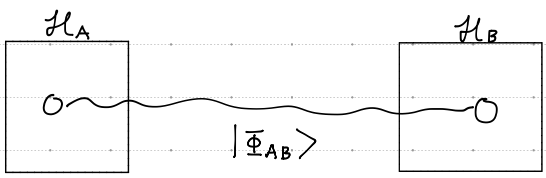
となるユニタリが存在。よって $|f_k'\rangle = (U^T)^*$ とおくと

$$|\Phi\rangle = (UU^*\otimes I)|\Phi\rangle$$

$$= (U\otimes I)\underbrace{(U^*\otimes I)|\Phi\rangle}_{(I\otimes(U^T)^*)|\Phi\rangle}$$

$$= (U\otimes U^{T*})|\Phi\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}|e_k'\rangle\otimes|f_k'\rangle$$



PVM $\{|e_k'\rangle\langle e_k'|\} \to k$ $\qquad \{|f_l'\rangle\langle f_l'|\} \to l$

$$P(k,l) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{if } k=l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

k \ l	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	0	$\frac{1}{3}$	0
3	0	0	$\frac{1}{3}$