

ネットワーク基礎論 2
2013年度 量子情報理論

小川朋宏

電気通信大学 大学院情報システム学研究所

2013年4月10日

自己紹介

- 小川朋宏 (おがわともひろ)
- 情報システム学研究科 ネットワーク基礎学講座
- 専門分野：情報理論，量子情報理論，情報理論的暗号
- 研究室：西 10 号館 8F 821
- 連絡先：ogawa あつと is.uec.ac.jp
- ホームページ：<http://www.quest.is.uec.ac.jp/ogawa/>

講義の進め方

- 内容：量子情報理論
- 予備知識：線形代数，確率論の初歩
- 次回から講義は黒板で行います．資料を後日 WEB に掲載します．
- 質問はいつでもどうぞ

評価の方法

- レポート：たくさん（レポートを重視します）
- 出席状況

量子情報理論とは

Shannon の情報理論 (1948 年 ~)

- 「情報」を**抽象的な記号の流れ**として体系化
- 確率論に基づく
- データ圧縮, 通信, 暗号に関する数学的理論・法則

量子情報理論 (1960 年代 ~)

- 1960 年: レーザーの発明
- 「情報」には**物理的な媒体が関与するはず!**
⇒ **量子状態を媒体**とする通信の議論に端を発する
- **量子力学的確率論**に基づく (= 非可換確率論)
- 古典系にない問題がある (難しいけど面白い)
 - 測定の最適化:
量子状態は測定により変化 ⇒ 一度の測定で出来るだけ最適化
 - エンタングルメント: 量子力学的相関

目標：古典-量子通信路符号化定理 (アドバンストです)

- イントロダクション + 量子情報理論の簡単な紹介 (4/8)
- 線形代数の復習：1回 ~ 2回
- 量子力学系の状態と測定
- 合成系とテンソル積，エンタングルメント
- 量子テレポーテーション，量子高密度符号化 (dense coding)
_____ ここまでは，あまり難しくないと考えます
- 量子力学系における情報量とその性質
von Neumann エントロピー，量子相対エントロピー，
Fidelity，トレース距離，Holevo 相互情報量
- 量子通信路 (完全正写像) と情報量の単調性
- 量子仮説検定と量子相対エントロピー
- 量子通信路 (完全正写像)，量子通信路符号化

(進み具合によっては，変更するかも知れません)

参考文献の紹介

- 量子情報理論の教科書
 - M. Nielsen and I. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge, 2000.
 - 林正人, 量子情報理論入門, サイエンス社, 2004.
 - M. Hayashi, Quantum Information: An Introduction, Springer, 2006. (上記の英訳 + 内容大幅増)
 - 石坂智, 小川朋宏, 河内亮周, 木村元, 林正人, 量子情報科学入門, 共立出版, 2012.
- 線形代数
 - 川久保勝夫, 線形代数学, 日本評論社, 1999. (初心者向け)
 - 竹内外史, 線形代数と量子力学, 裳華房, 1981. (復刊版が出ている)
 - 日合文雄, 柳研二郎, ヒルベルト空間と線型作用素, 牧野書店, 1995.
- 情報理論
 - T. M. Cover, J. A. Thomas, Elements of Information Theory, Wiley, 1991 (2nd ed. 2006).
- 量子力学
 - 清水明, 新版: 量子論の基礎, サイエンス社, 2003.
 - J. J. Sakurai, Modern Quantum Mechanics, Addison Wesley, 1985. (J. J. サクライ, 現代の量子力学, 吉岡書店, 1989.)

量子情報理論の簡単な紹介

以下のテーマについて，ガイダンス的説明をします．

- 量子力学系の状態と測定
- 量子暗号 (量子鍵配送，BB84 プロトコル)
- 合成系とテンソル積
- エンタングルメント
- 量子テレポーテーション
- 量子高密度符号化

量子力学系の公理について

量子力学系の特徴

- **確率法則**
測定結果は系の状態と測定に依存して確率的にのみ定まる
- **系の状態変化**
測定結果に依存して状態が変化 測定順序によって結果が異なる

↓ スカラーでは記述しきれない

Hilbert 空間上の作用素（行列）により記述される

- Hilbert 空間：内積を持つ（複素）ベクトル空間
- 有限次元の場合： $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^d$
- 内積 $\langle \varphi | \psi \rangle$ ($\varphi, \psi \in \mathcal{H}$) を持つ

Dirac のブラケット記法 $(\mathcal{H} = \mathbb{C}^d \text{ 数ベクトル空間, 標準内積})$

- 角括弧 $\langle \rangle$ は英語で bracket . 慣れると便利な記法 .
- ケット (縦ベクトル) ブラ (共役転置 : 横ベクトル)

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_d \end{pmatrix} \quad \langle\psi| = (\psi_1^* \quad \cdots \quad \psi_d^*)$$

- 内積 :

$$\langle\varphi|\psi\rangle = (\varphi_1^* \quad \cdots \quad \varphi_d^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_d \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^d \varphi_i^* \psi_i$$

- ケットブラは行列 :

$$|\psi\rangle\langle\varphi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_d \end{pmatrix} (\varphi_1^* \quad \cdots \quad \varphi_d^*) = \begin{pmatrix} \psi_1\varphi_1^* & \cdots & \psi_1\varphi_d^* \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_d\varphi_1^* & \cdots & \psi_d\varphi_d^* \end{pmatrix}$$

量子状態と測定

- 量子状態 = 長さ (ノルム) が 1 のベクトルで表現

量子状態 : $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (規格化条件 : $\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = 1$)

- m 個の測定結果を持つ測定 (m -valued measurement)

測定 : $E = \{E_1, \dots, E_m\}$

E_i ($i = 1, \dots, m$) は \mathcal{H} 上の正方行列で以下を満たすもの

$$E_i E_j = \delta_{i,j} E_i, \quad \sum_{i=1}^m E_i = I$$

互いに直交する部分空間への射影子の集合, 単位の分解

測定と状態の重ね合わせ

- 測定 \Rightarrow 直交する単位ベクトルによる線形和 (重ね合わせ) を指定

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^m E_i |\psi\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i |e_i\rangle$$

ただし

$$|e_i\rangle := \frac{E_i |\psi\rangle}{\|E_i |\psi\rangle\|} = \frac{E_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| E_i |\psi\rangle}} \quad (\text{互いに直交, ノルム 1})$$

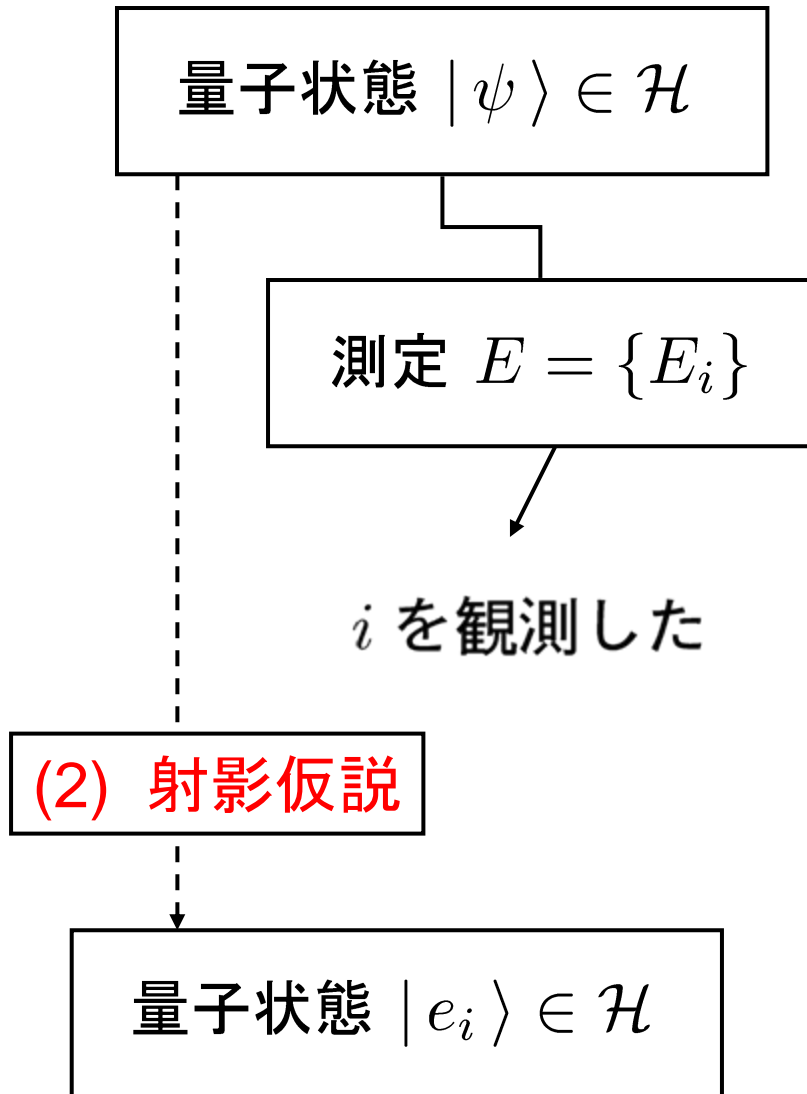
$$\therefore \|E_i |\psi\rangle\|^2 = \langle\psi| E_i^* E_i |\psi\rangle = \langle\psi| E_i |\psi\rangle$$

$$\alpha_i := \langle e_i | \psi \rangle = \frac{\langle\psi| E_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| E_i |\psi\rangle}} = \sqrt{\langle\psi| E_i |\psi\rangle} \quad (\text{振幅})$$

- 振幅の二乗 $|\alpha_i|^2$ は確率分布

$$|\alpha_i|^2 = \langle\psi| E_i |\psi\rangle, \quad \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 = \langle\psi| \sum_{i=1}^m E_i |\psi\rangle = 1$$

量子力学の公理



$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^m E_i |\psi\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i |e_i\rangle$$

(1) 確率法則

測定値 i を観測する確率

$$|\alpha_i|^2 = \langle \psi | E_i | \psi \rangle$$

量子暗号の背景:ワンタイムパッド

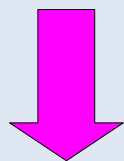
送信メッセージ
11001...

受信メッセージ
11001...

共有鍵
01101...

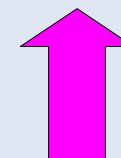
乱数を事前に共有

共有鍵
01101...



暗号化 (XOR)

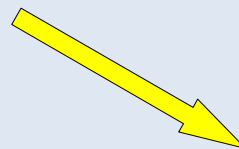
復号 (XOR)



暗号文
10100...

10100...

暗号文
10100...



盗聴者

暗号文は鍵を知らないとランダムなビット列

背景：なぜ量子暗号？

○ ワンタイムパッド暗号 (Shannon, 1948)

メッセージ : 010010	復号メッセージ : 010010
暗号鍵(共有乱数) : 101011	鍵(共有乱数) : 101011
送信系列(XOR) : 111001	受信系列 : 111001

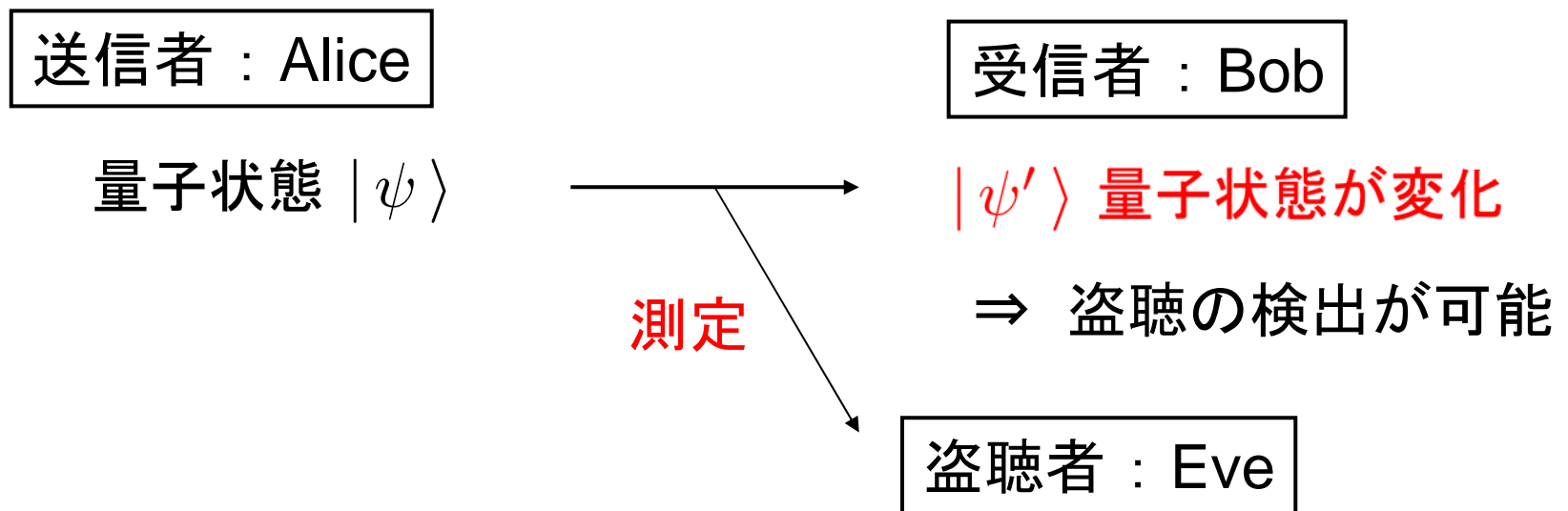
- ・ 情報理論的に安全なことが証明されている
- ・ メッセージと同じ長さの鍵が必要, 1回の使用で捨てる
- ・ 鍵の共有方法が問題

○ 公開鍵暗号 (Rivest-Shamir-Adleman, 1978)

- ・ 秘密鍵と公開鍵を分けることで, 鍵の共有問題を回避
- ・ 素因数分解の難しさ(一方向性)に依存
- ・ 安全性が理論的に証明されていない
- ・ 量子計算機による素因数分解アルゴリズム (Shor, 1994)
⇒ 暗号解読の危険性

量子暗号とは

- 量子状態送受信による乱数(鍵)の共有方法
- 量子力学 (射影仮説) が安全性を理論的に保証



- Bennett-Brassard (1984), BB84プロトコル

プラス基底とクロス基底

0,1のbit列 \Rightarrow 2種類の送信, 受信方法

○ 送信

プラス基底 (+)

$$\longrightarrow |e_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow |e_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

クロス基底 (×)

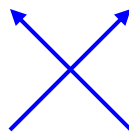
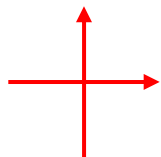
$$\nearrow |f_0\rangle = \frac{|e_0\rangle + |e_1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\nwarrow |f_1\rangle = \frac{|e_0\rangle - |e_1\rangle}{\sqrt{2}}$$


○ 受信 (測定)

$$|\psi\rangle = \alpha_0|e_0\rangle + \alpha_1|e_1\rangle$$

$$|\psi\rangle = \beta_0|f_0\rangle + \beta_1|f_1\rangle$$



受信方向と測定結果

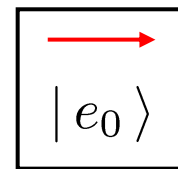
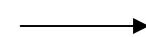
測定
プラス基底 

$$|e_0\rangle = 1|e_0\rangle + 0|e_1\rangle$$

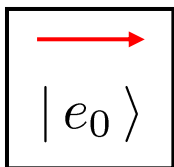
確率1

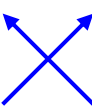


測定結果
0



送信
プラス基底



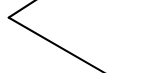
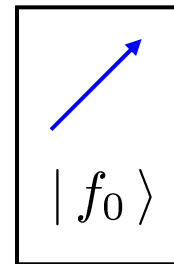
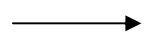
測定
クロス基底 

$$|e_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|f_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|f_1\rangle$$

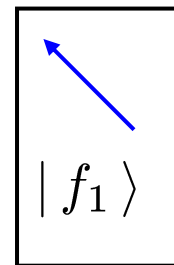
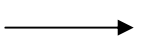
確率1/2



測定結果
0



測定結果
1



確率1/2

射影仮説

量子暗号鍵配布プロトコル (BB84)

送信者 : Alice

1. ランダムなbit列を用意する
2. ランダムな送信方向を用いてbit列を送信

受信者 : Bob

3. ランダムな受信方向を用いて量子状態を測定

双方 : 公開通信路

4. 送信方向と受信方向を伝え, 両者が一致していたものを残す
5. 残ったbit列からランダムにテストbitを取り一致を確認

量子暗号鍵配布プロトコル (BB84) : 例

送信者
Alice

送信 bit 列	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
送信方向	+	×	+	+	×	×	+	+	×	+	×	×	+	+
送信偏光	↑	↗	↑	↑	↗	↗	↑	↑	↗	→	↖	↖	↑	→

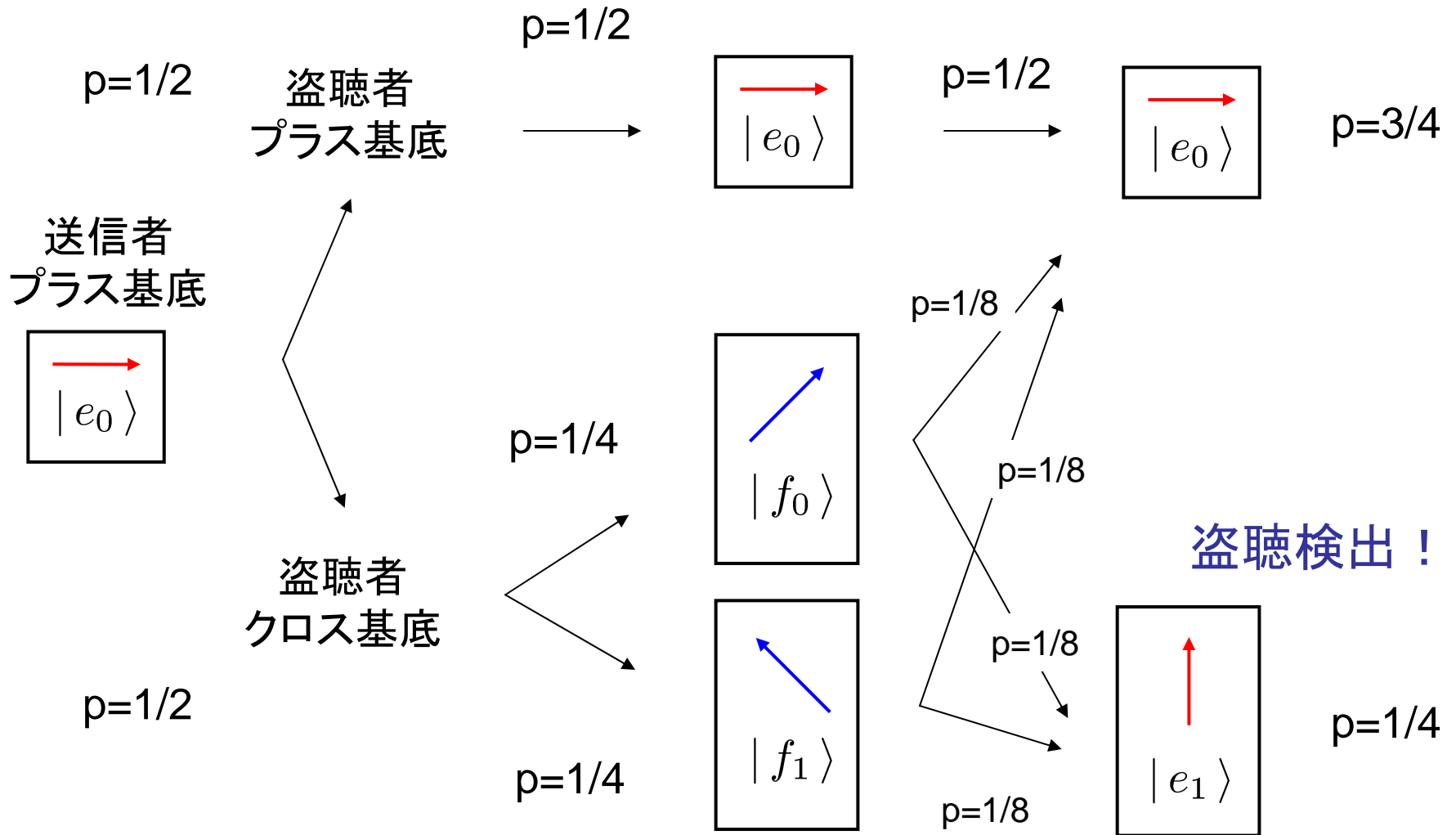
受信者
Bob

測定方向	+	+	×	+	×	×	×	+	×	+	+	×	×	+
受信偏光	↑			↑	↗	↗		↑	↗	→		↖		→
受信 bit 列	1			1	0	0		1	0	0		1		0

盗聴者
チェック

テスト bit	○				○						○			
完成 bit 列				1		0		1	0			1		0

盗聴者の検出



盗聴を見逃す確率 : $(3/4)^n \rightarrow 0$ (n テスト bit 数 $\rightarrow \infty$)

合成系

○ 物理系 \mathcal{H}_A と \mathcal{H}_B の合成系 \implies テンソル積空間 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

○ テンソル積演算(ベクトル)

$$|\psi_A\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

$$|\psi_B\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ a_m \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

クロネッカー積

テンソル積空間

○ テンソル積演算の性質

$$\begin{aligned}(\alpha|\psi_A\rangle + \beta|\varphi_A\rangle) \otimes |\psi_B\rangle &= \alpha|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle + \beta|\varphi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \\ |\psi_A\rangle \otimes (\alpha|\psi_B\rangle + \beta|\varphi_B\rangle) &= \alpha|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle + \beta|\psi_A\rangle \otimes |\varphi_B\rangle\end{aligned}$$

$$\text{○ 内積} : \langle \psi_A \otimes \psi_B | \varphi_A \otimes \varphi_B \rangle = \langle \psi_A | \varphi_A \rangle \langle \psi_B | \varphi_B \rangle$$

○ テンソル積空間

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B = \left\{ \sum_{ij} c_{ij} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \mid c_{ij} \in \mathbb{C}, |e_i\rangle : \mathcal{H}_A \text{の基底}, |f_j\rangle : \mathcal{H}_B \text{の基底} \right\}$$

行列のテンソル積

○ $X : \mathcal{H}_A$ 上の行列, $Y : \mathcal{H}_B$ 上の行列

$$(X \otimes Y)(|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle) = (X|\psi_A\rangle) \otimes (Y|\psi_B\rangle)$$

を線形に拡大して $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 上の行列 $X \otimes Y$ を定義

○ テンソル積 = クロネッカー積

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mm} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

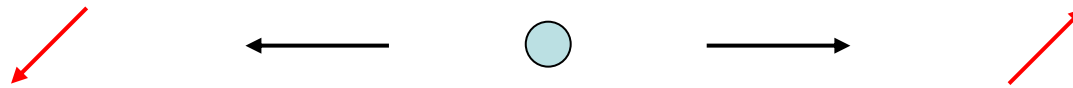
$$\implies X \otimes Y = \begin{pmatrix} x_{11}Y & \cdots & x_{1m}Y \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1}Y & \cdots & x_{mm}Y \end{pmatrix}$$

エンタングルメント (量子もつれ)

Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) の思考実験 (1935)

$$\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^2$$

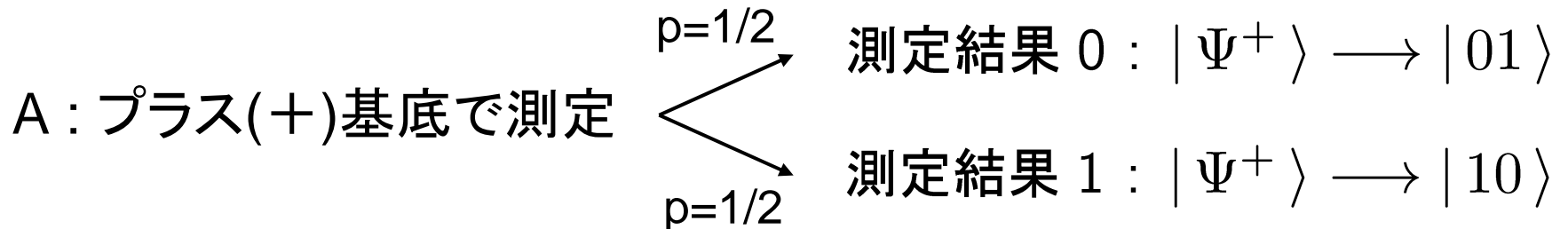
$$\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2$$



原子：一対の光子生成，角運動量保存

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

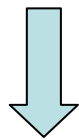
射影仮説



○ Aの測定結果にしたがって，Bの状態が瞬時に変化

歴史：Bell の不等式とエンタングルメント

- EPR : 「实在の局所性」 ⇒ 量子力学は不完全？
- Bell の不等式 (1964)
 - ・ 「实在の局所性」から導かれる実験的に検証可能な不等式
- Aspect et al. による実験 (1982)
 - ・ 「实在の局所性」ではなく, 量子力学を支持



パラダイムシフト

エンタングルメントを積極的に利用

Bell 基底

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle)$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle)$$



ユニタリ変換

$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 上の正規直交基底

量子テレポーテーション (Bennett et. al, 1993)

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$$

$$\text{Alice : } \mathcal{H}_A = \mathbb{C}^2$$

$$\text{Bob : } \mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2$$

未知の量子状態

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$(|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1)$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

エンタングルメント共有

$$|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle = \frac{1}{2} \left\{ |\Phi^+\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |\Phi^-\rangle \otimes (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) \right. \\ \left. + |\Psi^+\rangle \otimes (\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |\Psi^-\rangle \otimes (-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) \right\}$$

Alice : $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_A$ をベル基底で測定

\implies

Bob : 測定結果に応じてユニタリ変換

測定結果を通信

$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ を復元

二準位系のユニタリ変換

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{bit flip}} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{phase flip}} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X|0\rangle = |1\rangle$$

$$X|1\rangle = |0\rangle$$

$$Z|0\rangle = |0\rangle$$

$$Z|1\rangle = -|1\rangle$$

$$|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle = \frac{1}{2} \left\{ |\Phi^+\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |\Phi^-\rangle \otimes (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) \right. \\ \left. + |\Psi^+\rangle \otimes (\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |\Psi^-\rangle \otimes (-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) \right\}$$

$$\Phi^+ \implies I \text{ (恒等変換)}$$

$$\Phi^- \implies Z$$

$$\Psi^+ \implies X$$

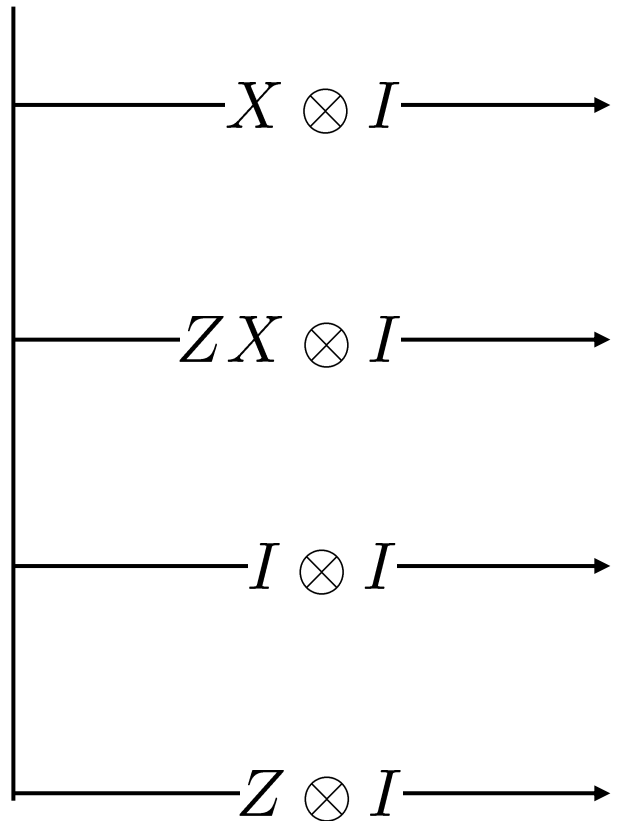
$$\Psi^- \implies ZX$$

Alice
測定結果

Bob : $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ を復元

Bell 基底とユニタリ変換

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$



$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

量子高密度符号化

dense coding (Bennett-Wiesner, 1992)

$$\text{Alice : } \mathcal{H}_A = \mathbb{C}^2$$

$$\text{Bob : } \mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2$$

エンタングルメント共有 $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

Alice : ユニタリ変換 \Rightarrow 粒子を送信

	1	$X \otimes I$	\longrightarrow	$ \Psi^+\rangle$
メッセージ	2	$ZX \otimes I$	\longrightarrow	$ \Psi^-\rangle$
	3	$I \otimes I$	\longrightarrow	$ \Phi^+\rangle$
	4	$Z \otimes I$	\longrightarrow	$ \Phi^-\rangle$

Bob : Bell基底で測定

○ 一回の粒子の送信で 2 bit のメッセージ伝達