確率論 (情報通信工学科) レポート解答

小川朋宏 (電気通信大学 大学院情報システム学研究科)

2010 年度 後学期

レポート 1　(1)〜(6) を証明せよ．

(1) $\forall A \subset \Omega,\ P(A) + P(A^c) = 1$

(2) $\forall A \subset \Omega,\ 0 \le P(A) \le 1$

(3) $P(\phi) = 0$

(4) $\forall A, B \subset \Omega,\ A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

(5) (有限加法性) $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ が互いに素ならば

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(6) $\forall A, B \subset \Omega,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

解答：

(1) すべての $A \subset \Omega$ に対して $\Omega = A \cup A^c$ で，A と A^c は互いに素（交わりがない）であるから，公理 (2) と (3) を用いると $P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$ が示される．

(2) 公理 (1) より $P(A) \ge 0$ であるから，$P(A) \le 1$ を示す．上の性質 (1) より $P(A) + P(A^c) = 1$ で，公理 (1) より $P(A^c) \ge 0$ であるから，$P(A) = 1 - P(A^c) \le 1$ が成り立つ．

(3) 上の性質 (1) で $A = \Omega$ とすると，$\Omega^c = \phi$ であるから，$P(\Omega) + P(\phi) = 1$．一方，公理 (2) より $P(\Omega) = 1$ なので，$P(\phi) = 1 - P(\Omega) = 0$.

(4) $A \subset B$ より，$B = A \cup (B \backslash A)$ で A と $B \backslash A$ は互いに素である．公理 (1) より $P(B \backslash A) \ge 0$ が成り立つことと，公理 (3) を用いると，$P(B) = P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B \backslash A) \le P(A)$.

(5) 帰納法により示す．$n = 2$ のときは公理 (3) より (5) が成り立つ．$n = k\ (k \ge 2)$ のとき (5) が成り立つと仮定して，$n = k+1$ のときも (5) が成立することを示せばよい．$A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1} \subset \Omega$ が互いに素であると仮定すると，

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + P(A_{k+1}) \quad [\because \text{公理 (3)}] \\
&= \sum_{i=1}^{k} P(A_i) + P(A_{k+1}) \quad [\because \text{帰納法の仮定}] \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって (5) が示された．

(6) $C = A \backslash B$, $D = B \backslash A$, $E = A \cap B$ とおくと，

$$A \cup B = C \cup D \cup E, \quad A = C \cup E, \quad B = D \cup E$$

で C, D, E は互いに素である．よって，上の性質 (5) を用いると，

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(C) + P(D) + P(E) \\ P(A) &= P(C) + P(E) \\ P(B) &= P(C) + P(E) \end{aligned}$$

が成り立つ．これらの式より

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(C) + P(D) + P(E) \\ &= P(C) + P(E) + P(D) + P(E) - P(E) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

レポート 2　男子と女子が生まれる確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする．子供が二人いる家族に会ったところ「第一子が男子」であることが分かった.

(1) 子供の男女構成についての標本空間 Ω を示せ.

(2) 男子がもう一人いる確率を求めよ.

解答：

(1) 男の子 =b (boy)，女の子 =g (girl) と表記する.

- 標本空間：$\Omega = \{\text{bb, bg, gb, gg}\}$
- 事象全体：$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$
- 確率測度：$P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ $(\forall \omega \in \Omega)$

(2) 「第一子が男の子」である事象を A とすると $A = \{\text{bb, bg}\}$ である.「男の子が二人いる」事象を B とおくと $B = \{\text{bb}\}$ である．$A \cap B = \{\text{bb}\}$ であるから，

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

レポート 3　ある製品を作る機械が 3 台あって，それらを A, B, C とする．A, B, C はそれぞれ全体の 20%, 30%, 50% を生産する．また A, B, C の各機械から生産される製品のうち，5%, 4%, 2% の割合で不良品があることが経験的に知られている.

(1) 製品全体の中から 1 個を取り出したとき，それが不良品である確率を求めよ.

(2) 製品が不良品であることを知ったとき，それが A, B, C の各機械から生産されたものである確率を求めよ.

解答：ベイズの公式に関する問題で，因果関係を逆転して確率計算が行えることに注目する．事象 A, B, C, D を以下のようにおく．

$$\begin{aligned}
&A: \text{ 機械 } A \text{ で製品が生産される事象}\\
&B: \text{ 機械 } B \text{ で製品が生産される事象}\\
&C: \text{ 機械 } C \text{ で製品が生産される事象}\\
&D: \text{ 製品が不良品である事象}
\end{aligned}$$

このとき問題文より

$$\begin{aligned}
&P(A) = \frac{20}{100}, && P(B) = \frac{30}{100}, && P(C) = \frac{50}{100}\\
&P(D|A) = \frac{5}{100}, && P(D|B) = \frac{4}{100}, && P(D|C) = \frac{2}{100}
\end{aligned}$$

である．条件付き確率の定義より，

$$\begin{aligned}
P(A \cap D) = P(A)P(D|A) = \frac{20}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{100}{10000} = \frac{10}{1000}\\
P(B \cap D) = P(B)P(D|B) = \frac{30}{100} \cdot \frac{4}{100} = \frac{120}{10000} = \frac{12}{1000}\\
P(C \cap D) = P(C)P(D|C) = \frac{50}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{100}{10000} = \frac{10}{1000}
\end{aligned}$$

製品は機械 A, B, C のいずれかで生産されているので，全確率の公式を用いると

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = \frac{10}{1000} + \frac{12}{1000} + \frac{10}{1000} = \frac{32}{1000}$$

よって，製品が不良品である条件のもとで，各機械で生産された確率は以下のように計算される．

$$\begin{aligned}
P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{10/1000}{32/1000} = \frac{10}{32}\ (= 0.3125)\\
P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{12/1000}{32/1000} = \frac{12}{32}\ (= 0.375)\\
P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{10/1000}{32/1000} = \frac{10}{32}\ (= 0.3125)
\end{aligned}$$

レポート 4

(1) 補題 7 の (1) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ について，一般には $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ は成立しない．反例を与えよ．

(2) 補題 7 の (3) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ および (4) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(B)$ を証明せよ．

解答：

(1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$ とする．$f(A) = \{1, 2\}$, $f(B) = \{1, 2\}$ であるから $f(A) \cap f(B) = \{1, 2\}$ となる．一方，$A \cap B = \{2\}$ だから $f(A \cap B) = \{2\}$ となり，$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ は成立しない．

(2) 任意の x について

$$x \in f^{-1}(C \cap D) \ \Leftrightarrow\ f(x) \in C \cap D \ \Leftrightarrow\ f(x) \in C \text{ かつ } f(x) \in D$$
$$\Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(C) \text{ かつ } x \in f^{-1}(D) \ \Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

よって (3) が成立する．同様に，任意の x について

$$x \in f^{-1}(C \cup D) \ \Leftrightarrow\ f(x) \in C \cup D \ \Leftrightarrow\ f(x) \in C \text{ または } f(x) \in D$$
$$\Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(C) \text{ または } x \in f^{-1}(D) \ \Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

よって (4) が成立する．

レポート 5 (復習：独立性) 一つの壺に 5 個の赤玉と 7 個の白玉が入っている．まず一つの玉を取り出し，その玉を壺に戻さないでもう一つ取り出す.「A を最初に取り出した玉が赤色である事象」,「B を次に取り出した玉が赤色である事象」とする．事象 A と B は独立か？

解答：事象 A の確率は $P(A) = \frac{5}{12}$ である．全確率の公式と chain rule より，事象 B の確率は

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{5(4+7)}{12 \cdot 11} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

となる．一方，

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33} \neq \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = P(A)P(B)$$

であるから，事象 A と B は独立ではない．

レポート 6 例 13 と同じ二つのルーレットを考える．それぞれの針が指す目盛 α, β の和を与える確率変数

$$X : (\alpha, \beta) \in \Omega \mapsto \alpha + \beta \in \mathbb{R}$$

を考える．X の確率密度関数を求めよ．ヒント：$x < 0,\ 0 \leq x < 1,\ 1 \leq x < 2,\ x \geq 2$ で場合分け．

解答：例題と同じ確率空間を考える．(α, β)-平面において，直線 $\alpha + \beta \leq x$ と α-軸，β-軸に囲まれた図形の面積を考えることで，確率分布関数 $F(x)$ は以下のように求まる．

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\alpha, \beta) \leq x\}) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, \alpha + \beta \leq x\}) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \frac{x^2}{2} & (0 \leq x < 1) \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2} & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

よって確率密度関数は

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (0 \leq x < 1) \\ 2 - x & (1 \leq x < 2) \\ 0 & (x \geq 2) \end{cases}$$

レポート 7　表の出る確率が p，裏の出る確率が $1-p$ のコインを 3 回投げる．標本空間 Ω は例 9 と同じである．確率変数

$$X : \Omega \to \text{表が出た回数}$$

を考える．X の確率関数を求めよ．解答は例 9 と同様の表を用いよ．

解答：

ω	$P(\{\omega\})$	$X(\omega)$	$P_X(x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$
$(0,0,0)$	$(1-p)^3$	0	$P_X(0) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0\}) = (1-p)^3$
$(1,0,0)$	$p(1-p)^2$	1	
$(0,1,0)$	$p(1-p)^2$	1	$P_X(1) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 1\}) = 3\,p(1-p)^2$
$(0,0,1)$	$p(1-p)^2$	1	
$(1,1,0)$	$p^2(1-p)$	2	
$(1,0,1)$	$p^2(1-p)$	2	$P_X(2) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\}) = 3\,p^2(1-p)$
$(0,1,1)$	$p^2(1-p)$	2	
$(1,1,1)$	p^3	3	$P_X(3) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 3\}) = p^3$

レポート　目的：ポアソン近似を通して在庫管理や品質管理のごく簡単な例を示すとともに，研究や就職活動で必要とされる思考プロセスの例を学ぶ.

(1) "フェルミ推定" の意味を調べよ.（解答は省略，必ず自身で調べて下さい.）

(2) 例 14（ポアソン近似）を参考にして，電通大全体で蛍光灯が 1 日に何本切れるかについての確率関数を概算で求めよ.（妥当な仮説を立ててポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ のパラメータ λ を大まかに概算せよ.）

解答：　(2) 例として，かなり大まかであるが以下の仮定（仮説）を置く．数字は大まかで構わない．また以下とは異なる視点から推論しても構わない.（実際には仮定が妥当であるかどうかの検証プロセスが必要になる.）

(a) 1 本の蛍光灯が切れる確率について仮説をたてる.
蛍光灯の寿命を 3 年ぐらい約 1000 日と仮定する．大学全体で蛍光灯は大量にあるので取り付けた時期はランダムであると仮定し，ある 1 本の蛍光灯に着目したときに確率 $p = \frac{1}{1000}$ で切れると仮定する.

(a) 電通大全体の蛍光灯の数 n を概算する.
ひとつの中規模な部屋に 40 本ぐらいの蛍光灯があるとし，1 つのフロアに 40 本 $\times$ 5 部屋 $=$ 200 本，1 つの建物に 200 本 $\times$ 6 階 $=$ 1200 本（建物の階数は様々であるが真ん中あたりをとって 6 階とした），電通大全体で概算 n =1200 本 $\times$ 40 棟 $=$ 48×10^3 本ぐらいの蛍光灯があるとする.

それぞれの蛍光灯が切れる事象は独立であると仮定すると，1 日に切れる蛍光灯の本数は二項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ に従うさらに n は非常に大きく p はとても小さいので，ポアソン近似が十分良い近似になっている．よって 1 日に切れる蛍光灯の本数は $\lambda = np = \frac{48\times10^3}{1000} = 48$ のポアソン分布に従うと予想される.

後でポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ の期待値は λ であることを学ぶ．逆に，1 日に切れる蛍光灯の本数の分布を調べることで，$\lambda = np$ の関係式より電通大全体の蛍光灯の数 n を推定することもできる.

レポート 8　例 15 の同時確率関数 $P_{XY}(x,y)$ が与えられているとき，条件付き確率関数 $P_{X|Y}(x|y)$ を求めよ.

解答：

$x \setminus$	$P_{X\|Y}(x\|1)$	$P_{X\|Y}(x\|2)$	$P_{X\|Y}(x\|3)$
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$

レポート 9　X と Y が独立に幾何分布 $\mathrm{Ge}(p)$ に従う確率変数であるとき，$Z = X + Y$ の確率関数を求めよ.

解答： $m = 0, 1, 2, \cdots$ として，

$$\begin{aligned} P_Z(m) &= \sum_{\substack{k,l=0,1,2,\cdots \\ m=k+l}} P_X(k)P_Y(l) = \sum_{k=0}^{m} P_X(k)P_Y(m-k) \\ &= \sum_{k=0}^{m} p(1-p)^k p(1-p)^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} p^2(1-p)^m = (m+1)p^2(1-p)^m \end{aligned}$$

レポート 10 (ポアソン分布の期待値と分散)　確率変数 X はポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとする.

(1) 期待値 $E[X]$ を求めよ.

(2) $E[X(X-1)]$ を求めよ.

(3) 分散 $V[X]$ を求めよ.

解答：

(1)

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{l+1}}{l!} = \lambda\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!} = \lambda$$

ただし，途中で $k-1=l$ とおき，$\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!} = 1$ を用いた.

(2)

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-2)!} = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{l+2}}{l!} = \lambda^2\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!} = \lambda^2$$

(3) $\lambda^2 = E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = E[X^2] - E[X] = E[X^2] - \lambda$ より $E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$ である. よって，

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

レポート 11 (指数分布の期待値と分散)　確率変数 X は指数分布 $\mathrm{Ex}(\alpha)$ に従うとする．

(1) 期待値 $E[X]$ を求めよ．

(2) 分散 $V[X]$ を求めよ．

解答：X を指数分布 $\mathrm{Ex}(\alpha)$ に従う確率関数とすると，部分積分により，期待値が以下のように求まる．

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} x\,dx = \left[-e^{-\alpha x}x\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-\alpha x})\,dx = 0 + \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]_0^\infty = 0 - (-\frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

分散は

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} x^2\,dx = \left[-e^{-\alpha x}x^2\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-\alpha x}\cdot 2x)\,dx = 0 + \frac{2}{\alpha}\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}x\,dx \\ &= \frac{2}{\alpha}E[X] = \frac{2}{\alpha^2} \end{aligned}$$

であるから，

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}$$

レポート 12 (二項分布のモーメント母関数)　Y_n を二項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ に従う確率変数とする．

(1) Y_n のモーメント母関数 $M_{Y_n}(t)$ を求めよ．

(2) $M'_{Y_n}(t)$, $M''_{Y_n}(t)$ を求めよ．

(3) (2) を利用して Y_n の期待値と分散を求めよ．

解答：

(1) Y_n の確率関数は

$$P_{Y_n}(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)} \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

であるから，二項定理を用いると，

$$\begin{aligned} M_{Y_n}(t) &= E[e^{tY_n}] = \sum_{k=0}^n e^{tk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(pe^t)^k(1-p)^{(n-k)} \\ &= \left\{pe^t + (1-p)\right\}^n = \left\{1 + p(e^t - 1)\right\}^n \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} M'_{Y_n}(t) &= n\left\{1 + p(e^t-1)\right\}^{n-1}\cdot pe^t \\ M''_{Y_n}(t) &= n(n-1)\left\{1 + p(e^t-1)\right\}^{n-2}\cdot \left(pe^t\right)^2 + n\left\{1 + p(e^t-1)\right\}^{n-1}\cdot pe^t \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} E[X] &= M'_X(0) = np \\ V[X] &= M''_X(0) - M'_X(0)^2 = \left\{n(n-1)p^2 + np\right\} - (np)^2 = -np^2 + np = np(1-p) \end{aligned}$$