確率論統計 レポート解答

2018/12/17（担当：小川）

レポート 1　(1)〜(6) を証明せよ．

(1) $\forall A \subset \Omega,\ P(A) + P(A^c) = 1$

(2) $\forall A \subset \Omega,\ 0 \leq P(A) \leq 1$

(3) $P(\phi) = 0$

(4) $\forall A, B \subset \Omega,\ A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

(5) (有限加法性) $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ が互いに素ならば

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(6) $\forall A, B \subset \Omega,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

解答：

(1) すべての $A \subset \Omega$ に対して $\Omega = A \cup A^c$ で，A と A^c は互いに素（交わりがない）であるから，公理 (2) と (3) を用いると $P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$ が示される．

(2) 公理 (1) より $P(A) \geq 0$ であるから，$P(A) \leq 1$ を示す．上の性質 (1) より $P(A) + P(A^c) = 1$ で，公理 (1) より $P(A^c) \geq 0$ であるから，$P(A) = 1 - P(A^c) \leq 1$ が成り立つ．

(3) 上の性質 (1) で $A = \Omega$ とすると，$\Omega^c = \phi$ であるから，$P(\Omega) + P(\phi) = 1$．一方，公理 (2) より $P(\Omega) = 1$ なので，$P(\phi) = 1 - P(\Omega) = 0$.

(4) $A \subset B$ より，$B = A \cup (B \backslash A)$ で A と $B \backslash A$ は互いに素である．公理 (1) より $P(B \backslash A) \geq 0$ が成り立つことと，公理 (3) を用いると，$P(B) = P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B \backslash A) \leq P(A)$.

(5) 帰納法により示す．$n = 2$ のときは公理 (3) より (5) が成り立つ．$n = k\,(k \geq 2)$ のとき (5) が成り立つと仮定して，$n = k + 1$ のときも (5) が成立することを示せばよい．$A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1} \subset \Omega$ が互いに素であると仮定すると，

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + P(A_{k+1}) \quad [\because \text{ 公理 } (3)\ ] \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(A_i) + P(A_{k+1}) \quad [\because \text{ 帰納法の仮定 }] \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって (5) が示された．

(6) $C = A \backslash B,\ D = B \backslash A,\ E = A \cap B$ とおくと，

$$A \cup B = C \cup D \cup E, \quad A = C \cup E, \quad B = D \cup E$$

で $C,\ D,\ E$ は互いに素である．よって，上の性質 (5) を用いると，

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(C) + P(D) + P(E) \\ P(A) &= P(C) + P(E) \\ P(B) &= P(C) + P(E) \end{aligned}$$

が成り立つ．これらの式より

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(C) + P(D) + P(E) \\ &= P(C) + P(E) + P(D) + P(E) - P(E) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

レポート 2　男子と女子が生まれる確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする．子供が二人いる家族に会ったところ「第一子が男子」であることが分かった．

(1) 子供の男女構成についての標本空間 Ω を示せ．

(2) 男子がもう一人いる確率を求めよ．

解答：

(1) 男の子 =b (boy)，女の子 =g (girl) と表記する．

- 標本空間：$\Omega = \{\mathrm{bb}, \mathrm{bg}, \mathrm{gb}, \mathrm{gg}\}$
- 事象全体：$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$
- 確率測度：$P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ $(\forall \omega \in \Omega)$

(2) 「第一子が男の子」である事象を A とすると $A = \{\mathrm{bb}, \mathrm{bg}\}$ である.「男の子が二人いる」事象を B とおくと $B = \{\mathrm{bb}\}$ である．$A \cap B = \{\mathrm{bb}\}$ であるから，

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

レポート 3　ある製品を作る機械が 3 台あって，それらを A, B, C とする．A, B, C はそれぞれ全体の 20%, 30%, 50% を生産する．また A, B, C の各機械から生産される製品のうち，5%, 4%, 2% の割合で不良品があることが経験的に知られている．

(1) 製品全体の中から 1 個を取り出したとき，それが不良品である確率を求めよ．

(2) 製品が不良品であることを知ったとき，それが A, B, C の各機械から生産されたものである確率を求めよ．

解答：ベイズの公式に関する問題で，因果関係を逆転して確率計算が行えることに注目する．事象 A, B, C, D を以下のようにおく．

A： 機械 A で製品が生産される事象
B： 機械 B で製品が生産される事象
C： 機械 C で製品が生産される事象
D： 製品が不良品である事象

このとき問題文より

$$P(A) = \frac{20}{100}, \quad P(B) = \frac{30}{100}, \quad P(C) = \frac{50}{100}$$
$$P(D|A) = \frac{5}{100}, \quad P(D|B) = \frac{4}{100}, \quad P(D|C) = \frac{2}{100}$$

である．条件付き確率の定義より，

$$P(A \cap D) = P(A)P(D|A) = \frac{20}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{100}{10000} = \frac{10}{1000}$$
$$P(B \cap D) = P(B)P(D|B) = \frac{30}{100} \cdot \frac{4}{100} = \frac{120}{10000} = \frac{12}{1000}$$
$$P(C \cap D) = P(C)P(D|C) = \frac{50}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{100}{10000} = \frac{10}{1000}$$

製品は機械 A, B, C のいずれかで生産されているので，全確率の公式を用いると

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = \frac{10}{1000} + \frac{12}{1000} + \frac{10}{1000} = \frac{32}{1000}$$

よって，製品が不良品である条件のもとで，各機械で生産された確率は以下のように計算される．

$$\begin{aligned}P(A|D) &= \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{10/1000}{32/1000} = \frac{10}{32}\ (=0.3125)\\ P(B|D) &= \frac{P(B\cap D)}{P(D)} = \frac{12/1000}{32/1000} = \frac{12}{32}\ (=0.375)\\ P(C|D) &= \frac{P(C\cap D)}{P(D)} = \frac{10/1000}{32/1000} = \frac{10}{32}\ (=0.3125)\end{aligned}$$

レポート 4　（出題していません．参考のため.）

(1) 補題 7 の (1) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$ について，一般には $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ は成立しない．反例を与えよ.

(2) 補題 7 の (3) $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$ および (4) $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(B)$ を証明せよ.

解答：

(1) $A=\{1,2\},\ B=\{2,3\},\ f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=1$ とする．$f(A)=\{1,2\},\ f(B)=\{1,2\}$ であるから $f(A)\cap f(B)=\{1,2\}$ となる．一方，$A\cap B=\{2\}$ だから $f(A\cap B)=\{2\}$ となり，$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ は成立しない.

(2) 任意の x について

$$\begin{aligned}&x\in f^{-1}(C\cap D)\ \Leftrightarrow\ f(x)\in C\cap D\ \Leftrightarrow\ f(x)\in C \text{ かつ } f(x)\in D\\ &\Leftrightarrow\ x\in f^{-1}(C) \text{ かつ } x\in f^{-1}(D)\ \Leftrightarrow\ x\in f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)\end{aligned}$$

よって (3) が成立する．同様に，任意の x について

$$\begin{aligned}&x\in f^{-1}(C\cup D)\ \Leftrightarrow\ f(x)\in C\cup D\ \Leftrightarrow\ f(x)\in C \text{ または } f(x)\in D\\ &\Leftrightarrow\ x\in f^{-1}(C) \text{ または } x\in f^{-1}(D)\ \Leftrightarrow\ x\in f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)\end{aligned}$$

よって (4) が成立する.

レポート 5 (復習：独立性) 一つの壺に 5 個の赤玉と 7 個の白玉が入っている．まず一つの玉を取り出し，その玉を壺に戻さないでもう一つ取り出す.「A を最初に取り出した玉が赤色である事象」,「B を次に取り出した玉が赤色である事象」とする．事象 A と B は独立か？

解答：事象 A の確率は $P(A)=\frac{5}{12}$ である．全確率の公式と chain rule より，事象 B の確率は

$$\begin{aligned}P(B) &= P(A\cap B)+P(A^c\cap B) = P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)\\ &= \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}+\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{11} = \frac{5(4+7)}{12\cdot 11} = \frac{5}{12}\end{aligned}$$

となる．一方,

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{5}{33}\neq\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12}=P(A)P(B)$$

であるから，事象 A と B は独立ではない.

レポート 6　例 13 と同じ二つのルーレットを考える．それぞれの針が指す目盛 α,β の和を与える確率変数

$$X:(\alpha,\beta)\in\Omega\mapsto\alpha+\beta\in\mathbb{R}$$

を考える．X の確率密度関数を求めよ．ヒント：$x<0,\ 0\le x<1,\ 1\le x<2,\ x\ge 2$ で場合分け.

解答：例題と同じ確率空間を考える．(α,β)-平面において，直線 $\alpha+\beta\leq x$ と α-軸，β-軸に囲まれた図形の面積を考えることで，確率分布関数 $F(x)$ は以下のように求まる．

$$F(x)=P(\{\omega\in\Omega\,|\,X(\alpha,\beta)\leq x\})=P(\{\omega\in\Omega\,|\,\alpha+\beta\leq x\})=\begin{cases}0 & (x<0)\\ \frac{x^2}{2} & (0\leq x<1)\\ 1-\frac{(2-x)^2}{2} & (1\leq x<2)\\ 1 & (x\geq 2)\end{cases}$$

よって確率密度関数は

$$p(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}0 & (x<0)\\ x & (0\leq x<1)\\ 2-x & (1\leq x<2)\\ 0 & (x\geq 2)\end{cases}$$

累積分布関数 $F_X(x)$ のグラフも出題しました．授業で解説した通り，

$$\lim_{x\to-\infty}F_X(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}F_X(x)=1$$

であり，単調増加することに注意して下さい．

レポート 7　表の出る確率が p，裏の出る確率が $1-p$ のコインを 3 回投げる．標本空間 Ω は例 9 と同じである．確率変数

$$X:\Omega\to\text{表が出た回数}$$

を考える．X の確率関数を求めよ．解答は例 9 と同様の表を用いよ．

解答：

ω	$P(\{\omega\})$	$X(\omega)$	$P_X(x)=P(\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)=x\})$
$(0,0,0)$	$(1-p)^3$	0	$P_X(0)=P(\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)=0\})=(1-p)^3$
$(1,0,0)$	$p(1-p)^2$	1	$P_X(1)=P(\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)=1\})=3\,p(1-p)^2$
$(0,1,0)$	$p(1-p)^2$	1	
$(0,0,1)$	$p(1-p)^2$	1	
$(1,1,0)$	$p^2(1-p)$	2	$P_X(2)=P(\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)=2\})=3\,p^2(1-p)$
$(1,0,1)$	$p^2(1-p)$	2	
$(0,1,1)$	$p^2(1-p)$	2	
$(1,1,1)$	p^3	3	$P_X(3)=P(\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)=3\})=p^3$

累積分布関数のグラフも出題しました．授業で解説した通り，0 から 1 まで増加し，確率重みがある点において，ジャンプすることがポイントになります．

レポート 8 確率関数 $f(x)=k\cdot{}_3C_x$ $(x=0,1,2,3)$ における k の値を求めよ．また，累積分布関数を求めよ．

二項定理より $\sum_{x=0}^{3}{}_3C_x=(1+1)^3=8$ であるから，規格化定数として $k=1/8$ とすればよい．累積分布関数は前レポートと同様．

レポート 9 平均して 1 分間に 2 人銀行窓口に並ぶとする．この窓口に 1 分間に 4 人以上並ぶ確率はいくつか？

$\lambda=2$ のポアソン分布に従う確率変数 X を考える．ポアソン分布の確率関数は $P_X(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ であるから，

$$\begin{aligned}\Pr\{\,X\leq 4\,\}&=1-\Pr\{\,X\leq 3\,\}=1-\sum_{k=0}^{3}P_X(k)\\&=1-e^{-2}\left\{\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}\right\}\\&=1-e^{-2}\left\{1+2+2+\frac{4}{3}\right\}=1-\frac{19}{3}e^{-2}\end{aligned}$$