

2019/1/7 (担当: 小川)

問1 子供が3人いる家族に会ったところ, 男子がいることが分かった. 男子がもう一人いる確率を以下の手順で求めよ. ただし, 男子と女子が生まれる確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする.

- (1) 子供の男女構成についての標本空間 Ω を示せ.
- (2) 男子がもう一人いる確率を求めよ.
- (3) 第1子, 第2子がともに男である事象を A とし, 第2子, 第3子がともに男である事象を B とする. 事象 A, B は独立かどうか計算により答えよ.

(解答)

(1) 男子を b , 女子を g で表すと, $\Omega = \{bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gb g, ggb, ggg\}$

(2) 男子がいる事象は $\mathcal{X} = \{bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gb g, ggb\}$, 男子が二人以上いる事象は $\mathcal{Y} = \{bbb, bbg, bgb, gbb\}$ である. $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \{bbb, bbg, bgb, gbb\}$ より, 求める確率は,

$$P(\mathcal{Y}|\mathcal{X}) = \frac{P(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})}{P(\mathcal{X})} = \frac{4/8}{7/8} = \frac{4}{7}$$

(3) $A = \{bbb, bbg\}$, $B = \{bbb, gbb\}$, $A \cap B = \{bbb\}$ であるから,

$$P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

となる. $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ より独立ではない.

問2 あるパソコンの20%は工場Aで生産され, 80%は工場Bで生産されている.

このパソコンで用いるハードディスクはX社とY社で受注生産しており,

- 工場Aでは20%の割合でX社のディスクを, 80%の割合でY社のディスクを使用している.
- 工場Bでは60%の割合でX社のディスクを, 40%の割合でY社のディスクを使用している.

- (1) このパソコンにX社のディスクが使われている割合を求めるため, 次の計算を行った.
以下の $a \sim d$ の等号について理由を述べ, 計算結果を求めよ.

$$\begin{aligned} P(X) &\stackrel{a}{=} P(X \cap (A \cup B)) \stackrel{b}{=} P((X \cap A) \cup (X \cap B)) \\ &\stackrel{c}{=} P(X \cap A) + P(X \cap B) \stackrel{d}{=} P(A)P(X|A) + P(B)P(X|B) \end{aligned}$$

- (2) このパソコンを購入したらX社のディスクが使われていた. このパソコンが工場Aで生産された確率 $P(A|X)$ を求めよ.

(解答)

(1) このパソコンについて生産工場とハードディスクに関する標本空間は

$$\Omega = \{(\text{工場 A, X 社}), (\text{工場 A, Y 社}), (\text{工場 B, X 社}), (\text{工場 B, Y 社})\}$$

と書ける。工場 A と工場 B で生産された事象は,

$$A = \{(\text{工場 A, X 社}), (\text{工場 A, Y 社})\}, \quad B = \{(\text{工場 B, X 社}), (\text{工場 B, Y 社})\}$$

ハードディスクが X 社, Y 社で生産されている事象は,

$$X = \{(\text{工場 A, X 社}), (\text{工場 B, X 社})\}, \quad Y = \{(\text{工場 A, Y 社}), (\text{工場 B, Y 社})\}$$

と書ける。

(a) $\Omega = A \cup B$ より, $X = X \cap \Omega = \Omega \cap (A \cup B)$

(b) 分配法則

(c) $(X \cap A)$ と $(X \cap B)$ は互いに素である。すなわち, $(X \cap A) \cap (X \cap B) = \phi$ 。よって確率の公理 (有限加法性) より (c) が成り立つ。

(d) 条件付き確率の定義 (確率の積法則)

(2)

$$\begin{aligned} P(A|X) &= \frac{P(A \cap X)}{P(X)} = \frac{P(A)P(X|A)}{P(A)P(X|A) + P(B)P(X|B)} \\ &= \frac{\frac{20}{100} \cdot \frac{20}{100}}{\frac{20}{100} \cdot \frac{20}{100} + \frac{80}{100} \cdot \frac{60}{100}} = \frac{4}{4 + 48} = \frac{1}{13} \end{aligned}$$

問 3

(1) $A = \{a, b, c\}$ の文字を 5 個重複を許して並べて出来る「文字列」を考える。a が 2 回, b が 2 回, c が 1 回現れる文字列は何通りあるか答えよ。

(2) 1 円玉, 10 円玉, 100 円玉について, 重複を許して合計 5 個さいふに入れるとする。この場合, 何通りの入れ方があるかを求めよ。ただし, さいふに入れる順番は考慮しないものとする。

(解答)

(1) $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$

(2) 重複組み合わせを考えればよい。 ${}_3H_5 = {}_7C_2 = 21$ 。

問 4 ${}_nC_k$ は異なる n 個の中から k 個取り出す場合の数であるとする。ただし, ${}_nC_0 = 1$ である。

(1) 以下の等式を証明せよ (言葉による説明)。

$${}_{n+1}C_k = {}_nC_k + {}_nC_{k-1} \quad (n \geq 1) \tag{1}$$

(2) 確率関数 $f(x) = k \cdot {}_3C_x$ ($x = 0, 1, 2, 3$) における k の値を求めよ。

(3) 上記 $f(x)$ について累積分布関数 $F(x)$ のグラフを図示せよ。

(解答)

- (1) 異なる $n+1$ 個のうち, ある特定の物を x とする. ${}_{n+1}C_k$ を求める際, x を取り出す場合, 取り出さない場合で, 場合分けをして考える. x を取り出す場合, x 以外の n 個から k 個を取り出すことになるので, この場合の数は ${}_nC_k$ である. 一方, x を取り出さない場合, x 以外の n 個から $k-1$ 個を取り出すことになり, この場合の数は ${}_nC_{k-1}$ である. よって (1) 式が成り立つ.

(2)

$$\sum_{x=0}^3 {}_3C_x = (1+1)^2 = 8$$

であるから, $k = \frac{1}{8}$.

(3) 省略

問5 確率変数 X は区間 $[0, 1]$ 上の一様分布に従うとする. $Y = X^2$ とするとき以下の問に答えよ.

(1) Y の累積分布関数 $F(y) = P(Y \leq y)$ を求めよ.

(2) Y の確率密度関数 $f(y)$ を求めよ.

(3) Y の期待値 $E[Y]$ を求めよ.

(解答)

(1)

$$F(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = \begin{cases} 0 & (y \leq 0) \\ P(X \leq y^{1/2}) = y^{1/2} & (0 \leq y \leq 1) \\ 1 & (y \geq 1) \end{cases}$$

(2)

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2}y^{-1/2} & (0 \leq y \leq 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(3)

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y) dy = \int_0^1 y \cdot \frac{1}{2}y^{-1/2} dy = \int_0^1 \frac{1}{2}y^{1/2} dy = \left[\frac{1}{3}y^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(別解)

$$E[Y] = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dy = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$