

2020年5月27日

量子情報数理特論

(第3回) 作用素の表現行列, トレース, エルミート作用素と固有値分解

電気通信大学 大学院情報理工学研究科

小川朋宏

2 作用素の表現行列, トレース, エルミート作用素と固有値分解

(課題1) 作用素の表現行列

Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の線形作用素 A について,

(1) 正規直交基底 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$ による表現行列を答えよ.

(課題2) トレース

(1) 正方行列のトレースを言葉で述べよ

(2) ベクトルの空間上の線形作用素について, トレースの定義を言葉で (簡潔に) 述べよ

(課題3) エルミート作用素と固有値分解

Hilbert 空間上の線形作用素について,

(1) エルミート共役の定義をのべよ.

(2) エルミート作用素の定義をのべよ.

(3) 数ベクトル空間ではエルミート共役はどうか? 言葉で簡潔に述べよ

(4) 半双線形形式を用いてエルミート共役を定義するのはなぜか?

(注意)

- 入力・出力のベクトル空間が同じ線形作用素 $A : V \rightarrow V$ を,
ベクトル空間 V 上の線形作用素 A とよびます.
- 特に, V が Hilbert 空間 \mathcal{H} のとき, Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の線形作用素 A とよびます.
- LaTeX の記号
 $|e_i\rangle$ は $\text{\ket{e_i}}$, $\langle e_i|$ は $\text{\bra{e_i}}$, A^* は A^*

2.1 ケットベクトルの成分表示

Definition 1. ヒルベルト空間 \mathcal{H} の基底 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$ が

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (\text{クロネッカーのデルタ})$$

を満たすとき (i.e., 互いに直交してノルムが1), **正規直交基底 (orthonormal basis)** であるという.

ケットベクトルの成分表示

$|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$ を正規直交基底とすると, ケットベクトル $|x\rangle \in \mathcal{H}$ の成分表示が得られる.

$$|x\rangle = \sum_{j=1}^n x_j |e_j\rangle, \quad x_i = \langle e_i | x \rangle \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

実際, 最初の式の両辺に $\langle e_i |$ をかけることで,

$$\langle e_i | x \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \langle e_i | e_j \rangle = x_i$$

ただし, クロネッカーデルタ $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{i,j}$ の性質より,
 $j = i$ となる項だけ生き残り, その他の項はゼロになることを使った.

2.2 完全性条件

Lemma 1. 任意の正規直交基底 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$ について,

$$\sum_{i=1}^n |e_i\rangle\langle e_i| = I \quad (\text{恒等作用素})$$

(証明) 任意の $|x\rangle \in \mathcal{H}$ について, 上式の左辺と右辺は同じ作用をする.

$$\left(\sum_{i=1}^n |e_i\rangle\langle e_i| \right) |x\rangle = \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i | x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i |e_i\rangle = |x\rangle = I |x\rangle$$

2.3 作用素の表現行列とブラケット記法

Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の線形作用素 $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ について、基底 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$ に関する表現行列 $\hat{A} = [\hat{A}_{ij}]$ は次式で定義される。

$$A|e_j\rangle = \sum_{k=1}^n \hat{A}_{kj} |e_k\rangle \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

表現行列のブラケット表現

$|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$ を正規直交基底とすると

$$\begin{aligned} \hat{A}_{ij} &= \langle e_i | A | e_j \rangle \\ A &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_i | A | e_j \rangle |e_i\rangle \langle e_j| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \hat{A}_{ij} |e_i\rangle \langle e_j| \end{aligned}$$

実際、表現行列の定義(1)の両辺に $\langle e_i |$ をかけることで、

$$\langle e_i | A | e_j \rangle = \sum_{k=1}^n \hat{A}_{kj} \langle e_i | e_k \rangle = \hat{A}_{ij}$$

完全性条件より、

$$A = IAI = \left(\sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i| \right) A \left(\sum_{j=1}^n |e_j\rangle \langle e_j| \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_i | A | e_j \rangle |e_i\rangle \langle e_j|$$

2.4 作用素の基底による展開表現

正規直交基底 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$ による成分表示：

$$|x\rangle = \sum_{j=1}^n x_j |e_j\rangle$$

で、 $|x\rangle$ と成分 $[x_j]$ の対応を \simeq で表す。 $|e_i\rangle\langle e_j|$ は作用素のなすベクトル空間の基底である。

$$|e_i\rangle\langle e_j| \simeq \begin{matrix} i\text{-th} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} j\text{-th} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} i\text{-th} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

すなわち、 A は $|e_i\rangle\langle e_j|$ により一意に展開される。

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_i | A | e_j \rangle |e_i\rangle\langle e_j|$$

$$\simeq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i\text{-th} \begin{matrix} j\text{-th} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \langle e_i | A | e_j \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle e_1 | A | e_1 \rangle & \cdots & \langle e_1 | A | e_j \rangle & \cdots & \langle e_1 | A | e_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle e_i | A | e_1 \rangle & \cdots & \langle e_i | A | e_j \rangle & \cdots & \langle e_i | A | e_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle e_n | A | e_1 \rangle & \cdots & \langle e_n | A | e_j \rangle & \cdots & \langle e_n | A | e_n \rangle \end{pmatrix}$$

2.5 トレース (trace)

Definition 2 (行列のトレース). $n \times n$ 正方行列 $A = [A_{ij}]$ について, **トレースを対角和で定義**:

$$\text{Tr } A := \sum_{i=1}^n A_{ii}$$

トレースの性質

Lemma 2.

- (i) (線形性) $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr } A + \text{Tr } B$, $\text{Tr}(cA) = c \text{Tr } A$ ($c \in \mathbb{C}$)
- (ii) (巡回性) $\text{Tr } AB = \text{Tr } BA$ (cyclic property) ($A : m \times n$ 行列, $B : n \times m$ 行列)

(証明) (i) は自明. (ii) $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$, $(BA)_{kl} = \sum_{i=1}^m B_{ki} A_{il}$ であるから,

$$\text{Tr } AB = \sum_{i=1}^m (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m B_{ki} A_{ik} = \sum_{k=1}^n (BA)_{kk} = \text{Tr } BA$$

2.6 (表現によらない) 線形作用素のトレース

ベクトル空間 V 上の線形作用素 $A: V \rightarrow V$ を考える. V の基底 $[e_1, e_2, \dots, e_n]$ に関して表現行列 \hat{A} は

$$A[e_1, e_2, \dots, e_n] = [e_1, e_2, \dots, e_n] \hat{A}$$

で定義される. 別の基底 $[e'_1, e'_2, \dots, e'_n]$ への基底の変換行列 S

$$[e'_1, e'_2, \dots, e'_n] = [e_1, e_2, \dots, e_n] S$$

を用いると, 表現行列の基底変換ルール

$$\hat{A} = S \hat{A}' S^{-1}$$

が成り立つ. これより, 表現行列のトレースは基底のとり方に依存しない.

$$\text{Tr } \hat{A} = \text{Tr } S \hat{A}' S^{-1} = \text{Tr } S^{-1} S \hat{A}' = \text{Tr } \hat{A}'$$

線形作用素のトレース

Definition 3. 線形作用素 $A: V \rightarrow V$ のトレースは表現行列のトレースとして定義される. 特に Hilbert 空間においては, 正規直交基底 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$ を用いて,

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n \langle e_i | A | e_i \rangle$$

(注意) 線形作用素のトレースについても, Lemma 2 (トレースの性質) が成立.

2.7 (表現によらない) 線形作用素の determinant

Definition 4 (行列の determinant). $n \times n$ 正方行列 $A = [A_{ij}]$ について

$$\det A := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)} \quad (\mathfrak{S}_n \text{ は } n \text{ 次対称群の集合})$$

Lemma 3 (determinant の性質).

- (i) (積ルール) $\det[AB] = (\det A) \cdot (\det B)$
- (ii) (逆行列) $\det[A^{-1}] = (\det A)^{-1}$ (積ルールと $A \cdot A^{-1} = I$ より)

この補題から, トレースと同様, determinant も基底のとり方に依存しないことが分かる.

$$\det \hat{A} = \det[S \hat{A}' S^{-1}] = (\det S) \cdot (\det \hat{A}') \cdot (\det S)^{-1} = \det \hat{A}'$$

線形作用素の determinant

Definition 5. 線形作用素 $A : V \rightarrow V$ の determinant は表現行列の determinant として定義される.

(注意) 線形作用素の determinant についても, Lemma 3 が成立.

2.8 半双線型形式 (sesquilinear form)

Definition 6 (半双線型形式). V をスカラー \mathbb{C} 上のベクトル空間とする.
ベクトル 2 つに対してスカラーを返す写像

$$\varphi : (v, w) \in V \times V \mapsto \varphi(v, w) \in \mathbb{C}$$

が以下の条件を満たすとき **半双線型形式 (sesquilinear form)** であるという.

- (i) **(右側について線形)** $\varphi(u, c_1v_1 + c_2v_2) = c_1\varphi(u, v_1) + c_2\varphi(u, v_2)$
- (ii) **(複素共役でひっくり返る)** $\overline{\varphi(u, v)} = \varphi(v, u)$

(注意) (i)(ii) より半双線形形式は左側について **共役線形** である.

$$\varphi(c_1u_1 + c_2u_2, v) = \overline{\varphi(v, c_1u_1 + c_2u_2)} = \overline{c_1\varphi(v, u_1) + c_2\varphi(v, u_2)} = \overline{c_1}\varphi(u_1, v) + \overline{c_2}\varphi(u_2, v)$$

- 半双線型形式 : **内積の定義において正定値性 (iii) を除いたもの** (内積は半双線形形式の一種)
- 何がうれしいの?
 - Hilbert 空間では, リースの表現定理を使うことで, **半双線型形式と線形作用素が 1 対 1 対応する**
 - 作用素の性質を半双線型形式 (値はスカラー) の性質に置き換えて議論できる

(c.f.) 内積の正定値性 (iii) : $\langle v, v \rangle \geq 0$ (等号成立は $v = \vec{0}$ のときに限る)

2.9 半双線型形式と線形作用素の1対1対応

Lemma 4. Hilbert空間 \mathcal{H} 上の半双線型形式 $\varphi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、
線形作用素 $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ が一意に存在して

$$\varphi(x, y) = \langle x, Ay \rangle$$

(証明) いったん $|y\rangle \in \mathcal{H}$ を固定する. $f_y(x) := \overline{\varphi(x, y)}$ とおくと, x について線形汎関数になる.
よってリースの表現定理より,

$$f_y(x) = \langle z(y), x \rangle$$

となる $|z(y)\rangle \in \mathcal{H}$ が各 $|y\rangle \in \mathcal{H}$ について一意に存在する. これにより, 写像

$$A : y \in \mathcal{H} \mapsto z(y) =: Ay \in \mathcal{H}$$

が定まる. A が線形写像であることは容易に確かめられ, $f_y(x) = \langle Ay, x \rangle$ となる. よって,

$$\varphi(x, y) = \overline{f_y(x)} = \overline{\langle Ay, x \rangle} = \langle x, Ay \rangle$$

2.10 作用素のエルミート共役 : $A \longleftrightarrow A^*$

Definition 7. 線形作用素 $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ に対して $\varphi(y, x) = \langle y, Ax \rangle$ とおくと半双線形形式になる。ここで $f(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ もまた半双線形形式であるから、

$$f(x, y) = \overline{\varphi(y, x)} = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \quad \forall |x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H}$$

となる線形作用素 A^* が一意に存在する。 A^* を A のエルミート共役作用素とよぶ。

正規直交基底 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$ による成分表示では、エルミート共役 \simeq 複素共役転置 :

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_i | A | e_j \rangle |e_i\rangle \langle e_j| \quad \longleftrightarrow \quad A^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\langle e_j | A | e_i \rangle} |e_i\rangle \langle e_j|$$

実際、 $A|x\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_i | A | e_j \rangle |e_i\rangle \langle e_j | x \rangle$ より、ケットとブラの対応が反線形であることに注意して、

$$\langle Ax | = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\langle e_i | A | e_j \rangle} \langle e_j | x \rangle \langle e_i | = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\langle e_i | A | e_j \rangle} \langle x | e_j \rangle \langle e_i |$$

よって、

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\langle e_i | A | e_j \rangle} \langle x | e_j \rangle \langle e_i | y \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \overline{\langle e_j | A | e_i \rangle} \langle x | e_i \rangle \langle e_j | y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$$

2.11 エルミート共役の性質とエルミート作用素

Lemma 5 (エルミート共役の性質).

- (i) エルミート共役は基底のとり方に依存しない概念である.
- (ii) $(A^*)^* = A$
- (iii) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$
- (iv) $(A + B)^* = A^* + B^*$
- (v) $(AB)^* = B^* A^*$

(証明) 定義で成分表示を使っていないことから (i) は明らか.
一方, 成分表示ではエルミート共役は複素共役転置と見なせるので (ii)~(v) も明らか.

エルミート作用素

Definition 8. $A^* = A$ のとき, A をエルミート作用素とよぶ.

Lemma 6 (トレースの性質).

- (i) (線形性) $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr} A + \text{Tr} B$, $\text{Tr}(cA) = c \text{Tr} A$ ($c \in \mathbb{C}$)
- (ii) (巡回性) $\text{Tr} AB = \text{Tr} BA$ (cyclic property)
- (iii) $\text{Tr} A^* = \overline{\text{Tr} A}$
- (iv) A がエルミート作用素のとき $\text{Tr} A \in \mathbb{R}$

(証明) (i) (ii) は再掲
(iii) (iv) は表現行列 $\langle e_i | A | e_j \rangle$ の性質を確認すると容易に確かめられる.

2.12 固有値と固有ベクトル

Definition 9. ベクトル空間 V 上の線形作用素 $A : V \rightarrow V$ に対して, $x \in V$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ について

$$Ax = \lambda x \quad (x \neq 0) \tag{2}$$

となるとき, λ を A の固有値 (eigenvalue), x を λ に対応する A の固有ベクトル (eigenvector) という.

Lemma 7. (Hilbert 空間上の) エルミート作用素の固有値は実数である.

(証明) $\lambda \in \mathbb{C}$ をエルミート作用素 A の固有値, $|x\rangle$ を対応する固有ベクトルとすると,

$$\begin{aligned} \langle x, Ax \rangle &= \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \\ &= \langle A^* x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

よって, $\langle x, x \rangle \neq 0$ であるから, $\bar{\lambda} = \lambda$. これは λ が実数であることを意味する.

Lemma 8. エルミート作用素の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する.

(証明) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ をエルミート作用素 A の異なる固有値, $|x\rangle, |y\rangle$ をそれぞれ固有ベクトルとすると,

$$\begin{aligned} \langle x, Ay \rangle &= \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle \\ &= \langle A^* x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

これより,

$$(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$$

$\lambda - \mu \neq 0$ であるから, $\langle x, y \rangle = 0$

2.13 エルミート作用素の固有ベクトルからなる正規直交基底

Theorem 1. \mathcal{H} を Hilbert 空間 ($\dim \mathcal{H} = n$), $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ をエルミート作用素とすると, A の固有ベクトルからなる正規直交基底 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$ が存在する.

(証明) 次元 n に関する帰納法で示す. ($n = 1$ の場合) 定理が成立することは明らかである.

($n \geq 2$ の場合) $\lambda \in \mathbb{C}$ が A の固有値であることは, 固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

を満たすことと同値であり, 固有方程式の解は複素数の範囲で重複を許して丁度 n 個存在. その中から固有値 λ を一つとってくると, (2) を満たす固有ベクトル $|x\rangle \neq 0$ が少なくとも1つ存在する. これを規格化して $|e_n\rangle = |x\rangle / \|x\|$ とおけば, $|e_n\rangle$ もまた固有ベクトルである. $|e_n\rangle$ の直交補空間を

$$\mathcal{K} = \{ x \in \mathcal{H} \mid \langle e_n | x \rangle = 0 \}$$

とおくと, $x \in \mathcal{K}$ ならば $Ax \in \mathcal{K}$ である (i.e., \mathcal{K} は A により不変). 実際, $x \in \mathcal{K}$ に対して, A のエルミート性により,

$$\langle e_n | Ax \rangle = \langle Ae_n | x \rangle = \langle \lambda e_n | x \rangle = \lambda \langle e_n | x \rangle = 0$$

このことから, A を \mathcal{K} に制限したエルミート作用素

$$A' : x \in \mathcal{K} \mapsto Ax \in \mathcal{K}$$

が定義される. $\dim \mathcal{K} = n - 1$ であるから, 帰納法の仮定より, A' の固有ベクトルからなる \mathcal{K} の正規直交基底 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_{n-1}\rangle$ が存在する. これらは $|e_n\rangle$ と直交する A の固有ベクトルでもあるから, $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_{n-1}\rangle, |e_n\rangle$ は A の固有ベクトルからなる正規直交基底である.

2.14 エルミート作用素の固有値分解

Theorem 2 (固有値分解定理). $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$ を A の固有ベクトルからなる正規直交基底とする. 対応する固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とするとすると,

$$A = \sum_{k=1}^n \lambda_k |e_k\rangle\langle e_k| \quad (3)$$

(証明) 線形作用素は基底の行き先で定まるので, 正規直交基底 $|e_i\rangle$ ($i = 1, 2, \dots, n$) について (3) の両辺の作用が等しいことを示せばよい. まず固有値, 固有ベクトルの定義から,

$$A |e_i\rangle = \lambda_i |e_i\rangle$$

一方で,

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k |e_k\rangle\langle e_k| \right) |e_i\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k |e_k\rangle \langle e_k | e_i \rangle = \lambda_i |e_i\rangle$$

(注意) 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ には重複固有値があるかも知れない. 重複固有値を持つ場合, 固有値分解は A に対して一意ではない.

2.15 固有値分解が一意的でない例

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とすると、固有値は $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ である (重複固有値)。

A は少なくとも二通りの固有値分解をもつ (実際には固有空間を回転する自由度がある)

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0) + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1) \\ A &= 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \right) + 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ -\frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \right) + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1) \end{aligned}$$