2020年6月3日

量子情報数理特論
（第4回）半正定値作用素，部分空間，射影子

電気通信大学 大学院情報理工学研究科

小川朋宏

3　半正定値作用素，部分空間，射影子

(課題1) 半正定値作用素

(1) 半正定値作用素の定義を述べよ

(2) 半正定値作用素の特徴付け（必要十分条件）を３つ述べよ

(課題2) 部分空間と射影子

(1) ベクトル空間の部分空間の定義を言葉で述べよ

(2) 以下は数ベクトル空間$\mathbb{R}^3$の部分空間かどうか？簡単な理由とともに答えよ.

(a) $A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x, y, z \geq 0 \right\}$

(b) $B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 1 \right\}$

(c) $C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$

(3) 射影子の幾何学的な定義を言葉で述べよ

(4) 射影子の代数的な定義を述べよ

3.1 半正定値作用素の定義

Definition 1. Hilbert空間$\mathcal{H}$上の作用素について，

- $A \geq 0$ （半正定値, positive semidefinite）または（非負定値, nonnegative definite）

$$\overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in \mathcal{H},\ \langle x, Ax \rangle \geq 0$$

- $A > 0$ （正定値, positive semidefinite）

$$\overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in \mathcal{H},\ \langle x, Ax \rangle > 0$$

Definition 2 (作用素の順序)**.**

- $A \geq B \overset{\text{def}}{\iff} A - B \geq 0$
- $A > B \overset{\text{def}}{\iff} A - B > 0$

Lemma 1. 以下の条件は同値である．

(i) $A \geq 0$
(ii) A はエルミートかつすべての固有値が非負

（証明）(i) ⇒ (ii)：(i) を仮定すると $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ であり，特に $\langle x, Ax \rangle \in \mathbb{R}$ である．これより，

$$\langle x, Ax \rangle = \overline{\langle x, Ax \rangle} = \langle Ax, x \rangle = \langle x, A^* x \rangle$$

であるから次式が成立．

$$\langle x, (A - A^*)x \rangle = 0 \quad (\forall x \in \mathcal{H})$$

以下の Lemma 2 から $A = A^*$ が導かれ，A がエルミートであることが示された．エルミート作用素 A の固有値分解により，

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k \left| e_k \middle\rangle\middle\langle e_k \right| \tag{1}$$

ここで，$a_1, \ldots, a_n$ は固有値で，$\left| e_1 \right\rangle, \ldots, \left| e_n \right\rangle$ は固有ベクトルからなる正規直交基底である．これより，$i = 1, \ldots, n$ について，

$$0 \overset{\text{(i)}}{\leq} \left\langle e_i \right| A \left| e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k \left\langle e_i \,\middle|\, e_k \right\rangle \left\langle e_k \,\middle|\, e_i \right\rangle = a_i$$

となって (ii) が示された．
(ii) ⇒ (i)：(ii) を仮定すると A がエルミートであることから固有値分解 (1) が得られ，固有値 a_i $(i = 1, \ldots, n)$ は非負である．すると，任意の $x \in \mathcal{H}$ について

$$\begin{aligned}\langle x, Ax \rangle &= \sum_{k=1}^{n} a_k \left\langle x \,\middle|\, e_k \right\rangle \left\langle e_k \,\middle|\, x \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \left| \left\langle x \,\middle|\, e_k \right\rangle \right|^2 \geq 0\end{aligned}$$

であるから (i) が成立．

Lemma 2. 以下の条件は同値である．

(i) $A=0$
(ii) $\forall x, y \in \mathcal{H},\ \langle x, Ay\rangle = 0$
(iii) $\forall x \in \mathcal{H},\ \langle x, Ax\rangle = 0$

（証明）(i) $\Rightarrow$ (iii)：明らか．(iii) $\Rightarrow$ (ii)：次の補題より，(ii)の形の二次形式は(iii)の形4つで書けることから示される．(ii) $\Rightarrow$ (i)：任意のベクトルと内積をとってゼロなものはゼロベクトル」（第2回資料）であったから，(ii)より$\forall y \in \mathcal{H},\ Ay=0$ が示される．これは (i) $A=0$ を意味する．

Lemma 3 (極化公式)**.** 二次形式(sesquilinear form)は引数が同じもの4つで書ける

$$\langle y, Ax\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} \overline{i^k}\left\langle x+i^k y, A(x+i^k y)\right\rangle \quad (\forall x, y \in \mathcal{H}) \quad (i=\sqrt{-1}\text{は虚数単位}) \tag{2}$$

（証明）

$$\langle x+y, A(x+y)\rangle = \langle x, Ax\rangle + \langle x, Ay\rangle + \langle y, Ax\rangle + \langle y, Ay\rangle \tag{3}$$

$$\langle x-y, A(x-y)\rangle = \langle x, Ax\rangle - \langle x, Ay\rangle - \langle y, Ax\rangle + \langle y, Ay\rangle \tag{4}$$

(3)–(4)より，

$$\langle x+y, A(x+y)\rangle - \langle x-y, A(x-y)\rangle = 2\left(\langle x, Ay\rangle + \langle y, Ax\rangle\right) \tag{5}$$

yにiyを代入すると，

$$\langle x+iy, A(x+iy)\rangle - \langle x-iy, A(x-iy)\rangle = 2i\left(\langle x, Ay\rangle - \langle y, Ax\rangle\right) \tag{6}$$

両辺に$-i$をかけることで，

$$-i\langle x+iy, A(x+iy)\rangle + i\langle x-iy, A(x-iy)\rangle = 2\left(\langle x, Ay\rangle - \langle y, Ax\rangle\right) \tag{7}$$

(5)+(7)より，

$$\langle x+y, A(x+y)\rangle - \langle x-y, A(x-y)\rangle - i\langle x+iy, A(x+iy)\rangle + i\langle x-iy, A(x-iy)\rangle = 4\langle x, Ay\rangle$$

よって，

$$4\langle x, Ay\rangle = \overline{i^4}\langle x+y, A(x+y)\rangle + \overline{i^2}\langle x-y, A(x-y)\rangle + \overline{i^1}\langle x+iy, A(x+iy)\rangle + \overline{i^3}\langle x-iy, A(x-iy)\rangle$$

（注意）極化公式(2)の係数は，内積について，右側引数が線形（ブラケット記法など物理流）と定義すると$\overline{i^k}$ $(k=1,2,3,4)$，左側引数が線形（フーリエ変換など数学流）と定義するとi^k $(k=1,2,3,4)$になる．

3.4　半正定値作用素の特徴付け（その２）

Lemma 4. 以下の条件は同値である．

(i) $A \geq 0$
(ii) $\exists B \geq 0,\ A = B^2$
(iii) $\exists C,\ A = C^*C$

（証明）(ii) ⇒ (iii)：明らか（Lemma 1より B はエルミートなので，$A = B^2 = B^*B$ と書ける）
(iii) ⇒ (i)：(iii) を仮定すると，

$$\langle x, Ax\rangle = \langle x, C^*Cx\rangle = \langle Cx, Cx\rangle \geq 0 \quad (\forall x \in \mathcal{H})$$

(i) ⇒ (ii)：(i) を仮定すると，Lemma 1より A はエルミートなので，固有値分解をもつ．

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k \,|e_k\rangle\langle e_k|$$

A の固有値は非負であるから，

$$B := \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}\,|e_k\rangle\langle e_k|$$

とおくと $B \geq 0$ で，

$$\begin{aligned} B^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}\,|e_k\rangle\langle e_k|\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{a_\ell}\,|e_\ell\rangle\langle e_\ell|\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{a_k}\sqrt{a_\ell}\,|e_k\rangle\,\langle e_k \,|\, e_\ell\rangle\,\langle e_\ell| \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k\,|e_k\rangle\langle e_k| = A \end{aligned}$$

となって (ii) が示された．

（注意）$B = \sqrt{A}$ と書いて，作用素 B は作用素 A の平方根であるという．

3.5 部分空間

Definition 3. ベクトル空間 V の部分集合 W について，

W は V の部分空間 $\overset{\text{def}}{\iff}$ V の加法，スカラー倍，ゼロベクトルによって W 自身がベクトル部分空間

$$\iff \begin{cases} u, v \in W \implies u + v \in W & \leftarrow \text{(i) 加法で閉じている} \\ c \in \mathbb{C}, u \in W \implies cu \in W & \leftarrow \text{(ii) スカラー倍で閉じている} \end{cases}$$

（注意）

- V でベクトル空間の公理が満たされているため，
  (i) (ii) 以外のベクトル空間の公理は W において自動的に満たされる．
- 特に「W におけるゼロベクトル」＝「V のゼロベクトル」であり，
  (ii) で $c = 0$ とすることで $\vec{0} \in W$ となって，ゼロベクトルの存在は自動的に満たされる．
- 部分空間であることを $W \subseteq V$ と表すことが多い．
  部分集合と同じ記号だが，違う意味である（注意）．

Definition 4 (直交補空間)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$\mathcal{K}$ を部分空間とするとき，

$$\mathcal{K}^{\perp} := \{\, y \in \mathcal{H} \mid \forall x \in \mathcal{K},\ \langle x \mid y \rangle = 0 \,\}$$

3.6　基底の延長定理

Theorem 1 (基底の延長). V をベクトル空間，$W \subseteq V$ を部分空間とする．
$e_1, \dots, e_k$ を W の基底とすると，$e_{k+1}, \dots, e_n \in V$ を付け加えることで，

$$\underbrace{\overbrace{e_1, e_2 \dots, e_k}^{W\text{ の基底}}, e_{k+1}, \dots, e_n}_{V\text{ の基底}}$$

と出来る．

Theorem 2 (正規直交基底の延長). $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ を部分空間とする．
$|e_1\rangle, \dots, |e_k\rangle$ を $\mathcal{K}$ の正規直交基底とすると，$|e_{k+1}\rangle, \dots, |e_n\rangle \in \mathcal{H}$ を付け加えることで，

$$\underbrace{\overbrace{|e_1\rangle, |e_2\rangle \dots, |e_k\rangle}^{\mathcal{K}\text{ の正規直交基底}}, |e_{k+1}\rangle, \dots, |e_n\rangle}_{\mathcal{H}\text{ の正規直交基底}}$$

と出来る．

Lemma 5. V の元 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ が一時独立であるとき，

(a) v_{k+1} が $v_1, v_2, \ldots, v_k$ の線形結合で表せない $\Longrightarrow$ (b) $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ は一次独立である．

（証明）対偶：$\neg$(b) $\Longrightarrow$ $\neg$(a) を示す．

(b) $\iff \forall c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} c_i v_i = 0 \implies (c_1, \ldots, c_{k+1}) = \vec{0}\right)$$

であるから，否定（$v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ は一次従属）は，$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ に注意すると，

$\neg$(b) $\iff \exists c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} c_i v_i = 0 \text{ かつ } (c_1, \ldots, c_{k+1}) \neq \vec{0}\right)$$

である．さらに，$c_{k+1} \neq 0$ でなければならない．

なぜなら，$c_{k+1} = 0$ とすると，$c_1, \ldots, c_n$ のいずれかがゼロでなく

$$\sum_{i=1}^{k} c_i v_i = 0 \quad \text{かつ} \quad (c_1, \ldots, c_k) \neq \vec{0}$$

が導かれ，$v_1, v_2, \ldots, v_k$ が一次独立であることに反するからである．したがって，

$$v_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{c_{k+1}} v_i$$

となって (a) の否定が導かれた．

3.8　基底の延長定理の証明

（基底の延長：証明）

$$W = \mathsf{span}\{e_1, \ldots, e_k\} := \left\{ \sum_{i=1}^{k} c_i e_i \;\middle|\; c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C} \right\} \subseteq V$$

が真部分集合ならば，$e_{k+1} \in V$ で $e_{k+1} \notin \mathsf{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ となるベクトルが存在する．よって Lemma 5 より $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}\}$ は一時独立である．同様に

$$\mathsf{span}\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}\} \subseteq V$$

が真部分集合ならば，$e_{k+2} \in V$ で $e_{k+2} \notin \mathsf{span}\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}\}$ となるベクトルが存在し，$\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}\}$ は一次独立 (★) である．この操作を続けることで

$$\mathsf{span}\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\} = V$$

かつ一次独立なベクトル $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$，すなわち V の基底が作られる（有限次元では余次元に関する帰納法，無限次元ではツォルンの補題を用いる）．

（正規直交基底の延長：証明）
(★) の部分でグラム・シュミットの直交化により，帰納的に直交化していけばよい．

3.9 直交直和分解と射影子(projection)

Lemma 6. $\mathcal{H}$を Hilbert 空間，$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$を部分空間とする．$\forall \left|x\right\rangle \in \mathcal{H}$について，

$$\left|x\right\rangle = \left|y\right\rangle + \left|z\right\rangle \quad (\left|y\right\rangle \in \mathcal{K},\ \left|z\right\rangle \in \mathcal{K}^{\perp})$$

となる分解が一意に定まる．これを直交直和分解とよぶ．

（証明）$\mathcal{K}$の正規直交基底を$\left|e_1\right\rangle, \ldots, \left|e_k\right\rangle$とすると，基底の延長定理により，

$$\left|e_1\right\rangle, \ldots, \left|e_k\right\rangle, \left|e_{k+1}\right\rangle, \ldots, \left|e_n\right\rangle$$

を$\mathcal{H}$の正規直交基底とすることが出来る．このとき，$\left|e_{k+1}\right\rangle, \ldots, \left|e_n\right\rangle$は$\mathcal{K}^{\perp}$の正規直交基底である．基底による展開

$$\left|x\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \left|e_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i \left|e_i\right\rangle + \sum_{i=k+1}^{n} x_i \left|e_i\right\rangle$$

は一意であるから，

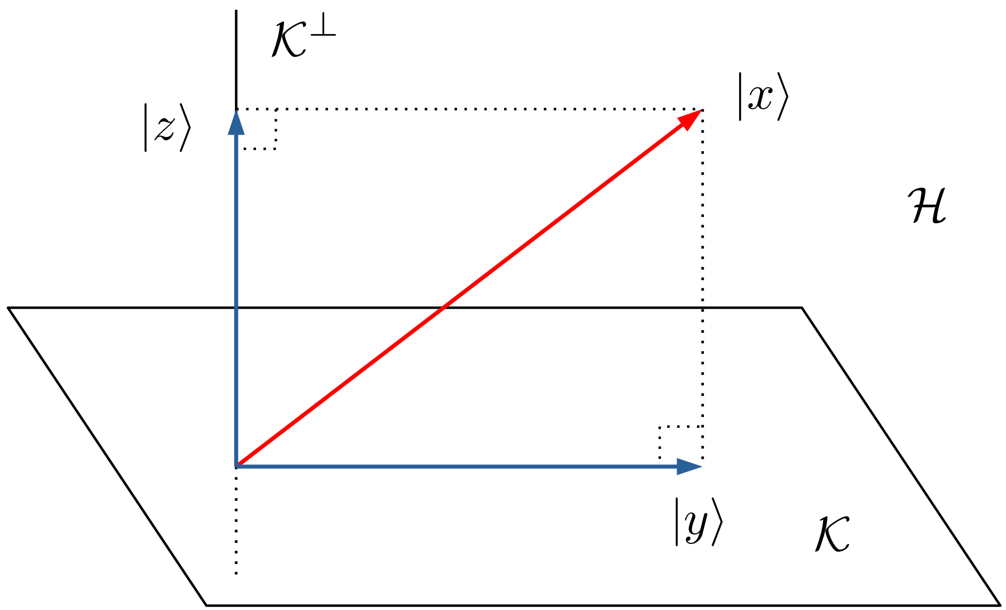
$$\left|y\right\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i \left|e_i\right\rangle \in \mathcal{K}, \quad \left|z\right\rangle = \sum_{i=k+1}^{n} x_i \left|e_i\right\rangle \in \mathcal{K}^{\perp}$$

とおけばよい．

Definition 5. 各$\left|x\right\rangle \in \mathcal{H}$について直交直和分解の$\mathcal{K}$成分を与える写像

$$P : \left|x\right\rangle = \left|y\right\rangle + \left|z\right\rangle \in \mathcal{H} \longmapsto \left|y\right\rangle \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$$

が定義され，線形写像であることが確かめられる．Pを部分空間$\mathcal{K}$への射影子(projection)という（$P_{\mathcal{K}}$とも書く）．



3.10 射影子の性質

Lemma 7. $\mathcal{H}$をHilbert空間，$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$を部分空間，$P_{\mathcal{K}}$を部分空間$\mathcal{K}$への射影子とする．

(i) $|y\rangle \in \mathcal{K}$のとき，$P_{\mathcal{K}} |y\rangle = |y\rangle$
(ii) $|z\rangle \in \mathcal{K}^{\perp}$のとき，$P_{\mathcal{K}} |z\rangle = 0$
(iii) $P_{\mathcal{K}} + P_{\mathcal{K}^{\perp}} = I$
(iv) $P_{\mathcal{K}} P_{\mathcal{K}^{\perp}} = 0$

（証明）
(i) $|y\rangle$の直交直和分解は$|y\rangle = |y\rangle + 0$だから．
(ii) $|z\rangle$の直交直和分解は$|z\rangle = 0 + |z\rangle$だから．
(iii) 任意の$|x\rangle$について直交直和分解を$|x\rangle = |y\rangle + |z\rangle$とすると，

$$P_{\mathcal{K}} |x\rangle = |y\rangle , \quad P_{\mathcal{K}^{\perp}} |x\rangle = |z\rangle$$

であるから，

$$(P_{\mathcal{K}} + P_{\mathcal{K}^{\perp}}) |x\rangle = P_{\mathcal{K}} |x\rangle + P_{\mathcal{K}^{\perp}} |x\rangle = |y\rangle + |z\rangle = |x\rangle = I |x\rangle$$

これは$P_{\mathcal{K}} + P_{\mathcal{K}^{\perp}} = I$を意味する．
(iv) 任意の$|x\rangle \in \mathcal{H}$について$P_{\mathcal{K}^{\perp}} |x\rangle \in \mathcal{K}^{\perp}$だから，(ii)より

$$P_{\mathcal{K}} P_{\mathcal{K}^{\perp}} |x\rangle = 0$$

これは$P_{\mathcal{K}} P_{\mathcal{K}^{\perp}} = 0$を意味する．

Lemma 8. $\mathcal{H}$ 上の作用素 P について以下は同値.

(i) P はある部分空間への射影子
(ii) $P \geq 0$, $P^2 = P$
(iii) $P^* = P$, $P^2 = P$　　(←代数的特徴付け)

（証明）(i) ⇒ (ii)：P はある部分空間 $\mathcal{K}$ への射影子であると仮定する．このとき

$$|x\rangle = |y\rangle + |z\rangle \quad (|y\rangle \in \mathcal{K}, |z\rangle \in \mathcal{K}^{\perp})$$

とすると，$P|x\rangle = |y\rangle$ であるから，

$$\langle x \,|\, Px\rangle = \langle y+z \,|\, P(y+z)\rangle = \langle y+z \,|\, y\rangle = \langle y \,|\, y\rangle + \langle z \,|\, y\rangle = \langle y \,|\, y\rangle \geq 0$$

よって $P \geq 0$ である．さらに，任意の $|x\rangle \in \mathcal{H}$ について，

$$P^2|x\rangle = P \cdot P|x\rangle = P|y\rangle = |y\rangle = P|x\rangle$$

となって作用が等しいので $P^2 = P$ である．

(ii) ⇒ (iii)：$P \geq 0$ ならば P はエルミートであることより明らか．

(iii) $\Rightarrow$ (i)：

$$\mathcal{K} := \operatorname{Im} P = \left\{ P\,|x\rangle \;\middle|\; |x\rangle \in \mathcal{H} \right\}$$

とおくと，$\mathcal{K}$ は $\mathcal{H}$ の部分空間である．式変形により

$$|x\rangle = P\,|x\rangle + (I-P)\,|x\rangle$$

であり，$P\,|x\rangle \in \mathcal{K}$ は $\mathcal{K}$ の定義より明らかである．よって，$(I-P)\,|x\rangle \in \mathcal{K}^\perp$ を示せばよい（上式が直交直和分解であり，P が $\mathcal{K}$ への射影子であることが分かる）．任意の $|y\rangle \in \mathcal{K}$ について，$\mathcal{K}$ の定義から $|y\rangle = P\,|x'\rangle$ となる $|x'\rangle \in \mathcal{H}$ が存在する．よって，

$$\langle y \,|\, (I-P)x\rangle = \langle Px' \,|\, (I-P)x\rangle = \langle x' \,|\, P^*(I-P)x\rangle \overset{\text{(a)}}{=} \left\langle x', (P-P^2)x\right\rangle \overset{\text{(b)}}{=} 0$$

すなわち，$(I-P)\,|x\rangle \in \mathcal{K}^\perp$．ここで，(a) $P^* = P$, (b) $P^2 = P$ を用いた．

- Lemma 8 (iii) $P^* = P$, $P^2 = P$ は射影子の代数的な特徴付けになっていて，(iii) を射影子の定義としてもよい．
- Hilbert 空間の部分空間と射影子は 1 対 1 対応している．
  - 部分空間 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ への直交射影として，(iii) を満たす作用素 P が作れる
  - 逆に，(iii) を満たす作用素 P に対して，部分空間 $\mathcal{K} = \operatorname{Im} P$ が作れる（上記証明）

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}\text{ の部分空間の集合} & & \text{射影子の集合} \\ \Cup & & \Cup \\ \mathcal{K} & \xleftrightarrow{1\text{ 対 }1} & P \end{array}$$

Lemma 9. $\mathcal{H}$をHilbert空間，$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$を部分空間とする．$|e_1\rangle, \dots, |e_k\rangle$を$\mathcal{K}$の正規直交基底，$|e_{k+1}\rangle, \dots, |e_n\rangle$を$\mathcal{K}^\perp$の正規直交基底として，

$$|e_1\rangle, |e_2\rangle \dots, |e_k\rangle, |e_{k+1}\rangle, \dots, |e_n\rangle$$

を$\mathcal{H}$の正規直交基底とする．このとき$\mathcal{K}$への射影子は次式で与えられる．

$$P = \sum_{i=1}^{k} |e_i\rangle\langle e_i|$$

（この正規直交基底で対角化すると，対角の$1 \sim k$番目まで1が並んで，$k+1$番目以降ゼロ）

（証明）基底による展開

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i |e_i\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i |e_i\rangle + \sum_{i=k+1}^{n} x_i |e_i\rangle$$

において

$$P|x\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i |e_i\rangle$$

となることから明らか．

3.13　補足：直交直和分解（11ページ，Lemma 6）一意性の証明

Lemma 6. $\mathcal{H}$ をHilbert空間，$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ を部分空間とする．$\forall \left|x\right\rangle \in \mathcal{H}$ について，

$$\left|x\right\rangle = \left|y\right\rangle + \left|z\right\rangle \quad (\left|y\right\rangle \in \mathcal{K}, \left|z\right\rangle \in \mathcal{K}^{\perp})$$

となる分解が一意に定まる．これを直交直和分解とよぶ．

（一意性の証明）二通りに分解できたとする．

$$\left|x\right\rangle = \left|y\right\rangle + \left|z\right\rangle = \left|y'\right\rangle + \left|z'\right\rangle \quad (\left|y\right\rangle, \left|y'\right\rangle \in \mathcal{K}, \left|z\right\rangle, \left|z\right\rangle \in \mathcal{K}^{\perp})$$

これを移項すると

$$\left|y\right\rangle - \left|y'\right\rangle = \left|z'\right\rangle - \left|z\right\rangle \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^{\perp} \tag{8}$$

$\mathcal{K} \cap \mathcal{K}^{\perp} = \{0\}$ であることを示す．任意の $\left|v\right\rangle \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^{\perp}$ について，$\left|v\right\rangle \in \mathcal{K}$ かつ $\left|v\right\rangle \in \mathcal{K}^{\perp}$ であるから $\left\langle v \,\middle|\, v\right\rangle = 0$ である．すなわち，$\mathcal{K} \cap \mathcal{K}^{\perp} = \{0\}$ が示された．よって，(8) より，

$$\left|y\right\rangle - \left|y'\right\rangle = \left|z'\right\rangle - \left|z\right\rangle = 0$$

となって，$\left|y\right\rangle = \left|y'\right\rangle$, $\left|z\right\rangle = \left|z'\right\rangle$