2020年6月24日

量子情報数理特論
（第7回）テンソル積空間，合成系

電気通信大学 大学院情報理工学研究科

小川朋宏

6　テンソル積空間，合成系

(課題)

(1) クロネッカー積 $(a,b)\otimes(c,d)$ を求めよ（横ベクトルで解答）
(2) 双線型写像の定義を述べよ
(3) ベクトル空間のテンソル積について定義を述べよ
(4) n 次元ベクトル空間 V と m 次元ベクトル空間 W のテンソル積空間 $V\otimes W$ の次元を答えよ
(5) テンソル積の一意性とは何か？（数式を使わず簡単に）
(6) Hilbert 空間のテンソル積について定義を述べよ
(7) コンピュータプログラムで，配列 `a[0]`，...，`a[99]` と配列 `b[0]`，...，`b[99]` のテンソル積を表現するには，どのようにすれば良いか？

（余談）テンソルの概念は機械学習(AI)にも使われています．深層学習のライブラリ tensorflow.

Definition 1 (クロネッカー積)**.**
数ベクトル空間$\mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^n$ のベクトルについて，

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ a_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ a_m \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ \vdots \\ a_1 b_n \\ \hline a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \\ \vdots \\ a_2 b_n \\ \hline \vdots \\ \hline a_m b_1 \\ a_m b_2 \\ \vdots \\ a_m b_n \end{array}\right)$$

（例）$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$

（$\mathbb{C}^2$ の標準基底）$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

（$\mathbb{C}^3$ の標準基底）$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

について，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$$

これは$\mathbb{C}^6$ の標準基底である！よって，

$$\mathbb{C}^6 = \mathrm{span}\,\{\, e_i \otimes f_j \mid e_i\ (i = 1, 2),\ f_j\ (j = 1, 2, 3)\,\}$$

このことを$\mathbb{C}^6 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ とかく．

6.2 双線型写像とテンソル積

Definition 2 (双線型写像). ベクトル空間 V, W の直積からベクトル空間 T への写像

$$f:(v,w)\in V\times W\longmapsto f(v,w)\in T$$

が第１引数と第２引数のそれぞれについて線形であるとき，すなわち，

$$f(a_1v_1+a_2v_2,w)=a_1f(v_1,w)+a_2f(v_2,w)$$
$$f(v,b_1w_1+b_2w_2)=b_1f(v,w_1)+b_2f(v,w_2)$$

$(v,v_1,v_2\in V,\ w,w_2,w_2\in W,\ a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{C})$ が成立するとき，双線型写像であるという．

Definition 3 (テンソル積). ベクトル空間 V, W の直積からベクトル空間 T への写像

$$f:(v,w)\in V\times W\longmapsto f(v,w)\in T$$

について，

(i) f は双線型写像である
(ii) V の基底 $\{e_i\}_{i=1}^m$，W の基底 $\{f_j\}_{j=1}^n$ に対して，$f(e_i,f_j)$ が T の基底である

が満たされるとき，$f(v,w)$ をベクトル v, w のテンソル積とよび，$f(v,w)=v\otimes w$ と書く．
また，ベクトル空間 T をテンソル積空間とよび，$T=V\otimes W$ と書く．

Lemma 1. 一般に，$\{e_i\}_{i=1}^m$ を V の基底，$\{f_j\}_{j=1}^n$ を W の基底として，

$$
\begin{aligned}
A &:= \mathrm{span}\left\{\, f(e_i, f_j) \mid e_i\,(i = 1, \ldots, m),\ f_j\,(j = 1, \ldots, n) \,\right\} && (1)\\
B &:= \mathrm{span}\left\{\, f(v, w) \mid v \in V, w \in W \,\right\} && (2)\\
&= \mathrm{span}\left\{ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v^i w^j f(e_i, f_j) \;\middle|\; v^i \in \mathbb{C}\,(i = 1, \ldots, m),\ w^j \in \mathbb{C}\,(j = 1, \ldots, n) \right\} && (3)\\
&\subseteq \mathrm{span}\left\{\, f(e_i, f_j) \mid e_i\,(i = 1, \ldots, m),\ f_j\,(j = 1, \ldots, n) \,\right\} = A
\end{aligned}
$$

とおくと $A = B$ である．実際，span による定義式(1) (2)を比べると $A \subseteq B$ であり，
双線型による展開式(3)より，上記の通り $B \subseteq A$ である．

Example 1 (クロネッカー積)**.**

$$
f : (v, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \longmapsto f(v, w) = v \otimes w \in \mathbb{C}^{mn}
$$

(i) クロネッカー積は双線型写像である（定義を観察すると明らか）

(ii) $\{e_i\}_{i=1}^m$, $\{f_j\}_{j=1}^n$ を $\mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^n$ の標準基底とすると，（例で見たように）$e_i \otimes f_j$ は $\mathbb{C}^{mn}$ の標準基底である．

よって，$\mathbb{C}^{mn} = \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$

6.3　テンソル積の構成

Lemma 2. テンソル積（およびテンソル空間）は必ず存在する

（証明）$\dim V = m, \dim W = n$ とする（有限次元を仮定，無限次元の場合でも証明は同様）.
$\{e_i\}_{i=1}^m$, $\{f_j\}_{j=1}^n$ を V, W の基底として，形式的に $\{\, g_{i,j} \mid (i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n) \,\}$ を基底とする mn 次元ベクトル空間：

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c^{i,j} g_{i,j} \;\middle|\; c^{i,j} \in \mathbb{C} \quad (i = 1, 2 \dots, m,\ j = 1, 2 \dots, n) \right\}$$

を考え，基底の対応 $f(e_i, f_j) := g_{i,j}$ を双線型に拡張してやればよい．すなわち，
$v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i \in V$, $w = \sum_{j=1}^{m} w^j f_j \in W$ について

$$f(v, w) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v^i w^j g_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v^i w^j f(e_i, f_j) \in T$$

と定義すると (i) 双線型写像であり，定義より (ii) $f(e_i, f_j) = g_{i,j}$ が T の基底である．

Lemma 3. 上の構成方法と後に述べるテンソル積の一意性から，

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \times \dim W$$

6.4 テンソル積の普遍性（テンソル積は双線型写像の親玉）

Theorem 1 (テンソル積の普遍性). ベクトル空間 V, W からベクトル空間 S への双線型写像

$$g : (v, w) \in V \times W \longmapsto g(v, w) \in S$$

が任意に与えられたとき，線形写像

$$g' : x \in V \otimes W \longmapsto g(x) \in S$$

が唯一存在して，$g = g' \circ f$

（証明）$\{e_i\}_{i=1}^{m}$, $\{f_j\}_{j=1}^{n}$ を V, W の基底とすると，テンソル積空間 $V \otimes W$ の基底は $\{\, e_i \otimes f_j \mid i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n \,\}$ であるから，写像 g' が

$$g' : x = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c^{i,j} e_i \otimes f_j \in V \otimes W \longmapsto \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c^{i,j} g(e_i, f_j) \in S$$

で定義される．[*1] これは明らかに線形写像であり，基底について，

$$(g' \circ f)(e_i, f_j) = g'(f(e_i, f_j)) = g'(e_i \otimes f_j) = g(e_i, f_j)$$

双線型性を用いることで，$(g' \circ f)(v, w) = g(v, w)$ $(\forall v \in V, \forall w \in W)$ が導かれる．

[*1] この場合，基底を固定したときの x の展開方法が 1 通りなので well-defined です．入力要素の表現方法が 1 通りでない場合，1 つの入力の行き先が 2 つ定義されているかも知れないので要注意です．

（Theorem 1：唯一であることの証明）線形写像

$$g'_1 : x \in V \otimes W \longmapsto g(x) \in S, \quad g'_2 : x \in V \otimes W \longmapsto g(x) \in S$$

の２つがTheorem 1の性質を満たしているとすると，$g(v, w) = g'_1 \circ f(v, w) = g'_2 \circ f(v, w)$ が成立する．
v, w として V, W の基底をとってくれば，

$$g'_1 \circ f(e_i, f_j) = g'_2 \circ f(e_i, f_j) \iff g'_1(e_i \otimes f_j) = g'_2(e_i \otimes f_j) \quad (i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$$

g'_1 と g'_2 で基底の行き先が等しいから $g'_1 = g'_2$ である．

Theorem 2 (テンソル積の一意性). テンソル積

$$f : (v, w) \in V \times W \longmapsto f(v, w) = v \otimes w \in T$$

は線形同型（逆写像を持つ線形写像で移り合う自由度）を除いて一意である．すなわち，

$$g : (v, w) \in V \times W \longmapsto g(v, w) \in S$$

もテンソル積の条件を満たすならば，線形写像

$$f' : T \longrightarrow S, \quad g' : S \longrightarrow T$$

が存在して $f' \circ g' = \mathrm{id}$, $g' \circ f' = \mathrm{id}$.

（証明）(f, T) の組がテンソル積であることから，普遍性(Theorem 1)より線形写像 $g' : T \longrightarrow S$ が存在して $g = g' \circ f$ が成り立つ．(g, S) の組もテンソル積であることから，立場を入れ替えることで，線形写像 $f' : S \longrightarrow T$ が存在して $f = f' \circ g$ が成り立つ．これらより，

$$f = f' \circ g = f' \circ g' \circ f$$

この両辺の引数に基底を入れると，

$$\mathrm{id}(e_i \otimes f_j) = e_i \otimes f_j = f(e_i, f_j) = (f' \circ g' \circ f)(e_i, f_j) = (g' \circ f')(e_i \otimes f_j)$$

となって $\mathrm{id} = g' \circ f'$．立場を入れ替えることで，$\mathrm{id} = f' \circ g'$.

6.6 Hilbert空間のテンソル積

$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$をHilbert空間，$\{|e_i\rangle\}_{i=1}^m$，$\{|f_i\rangle\}_{j=1}^n$ を$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$の正規直交基底とすると，ベクトル空間としてのテンソル積空間$\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$は

$$\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}=\left\{x=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c^{i,j}\left|e_i\right\rangle\otimes\left|f_j\right\rangle \;\middle|\; c^{i,j}\in\mathbb{C}\;(i=1,2\ldots,m,\;j=1,2\ldots,n)\right\} \tag{4}$$

Definition 4. $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$をHilbert空間とするとき，ベクトル空間としてのテンソル積空間$\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$において，

$$\langle a\otimes c, b\otimes d\rangle := \langle a,b\rangle\langle c,d\rangle \quad (\left|a\right\rangle,\left|b\right\rangle\in\mathcal{H},\;\left|c\right\rangle,\left|d\right\rangle\in\mathcal{K})$$

を拡張することで内積を定めたHilbert空間を，テンソル積Hilbert空間という．

（注意）$\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$の要素は，テンソル積の形$\left|x\right\rangle\otimes\left|y\right\rangle$だけではなく，テンソル積の線形結合(4)の形をしている．内積の定義において「拡張する」という意味は，一般のベクトル

$$x=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c^{i,j}\left|e_i\right\rangle\otimes\left|f_j\right\rangle\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{K},\quad y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d^{i,j}\left|e_i\right\rangle\otimes\left|f_j\right\rangle\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$$

に対して，内積の条件（左で反線形，右で線形）を満足するように，次式で定義することである．

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\overline{c^{i,j}}d_{k,l}\langle e_i\otimes f_j, e_k\otimes f_l\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\overline{c^{i,j}}d_{k,l}\langle e_i,e_k\rangle\langle f_j,f_l\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{c^{i,j}}d_{i,j}$$

6.7 作用素のテンソル積

Definition 5. 線形作用素 $A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, $B : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ に対して,

$$(A \otimes B)(|x\rangle \otimes |y\rangle) := (A\,|x\rangle) \otimes (B\,|y\rangle) \quad (|x\rangle \in \mathcal{H}_1,\ |y\rangle \in \mathcal{K}_1) \tag{5}$$

を線形に拡張することで線形作用素

$$A \otimes B : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2$$

を定義する.

（注意）$\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{m}$, $\{|f_i\rangle\}_{j=1}^{n}$ を $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{K}_1$ の正規直交基底とすると，$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1$ の基底は $|e_i\rangle \otimes |f_i\rangle$ である. (5) により基底の行き先が次式で定まるので，あとは $A \otimes B$ の線形性を要請しておけば線形作用素を定めたことになる.

$$(A \otimes B)(|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle) := (A\,|e_i\rangle) \otimes (B\,|f_j\rangle) \quad (i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

6.8　行列のクロネッカ積

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,r} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{q,1} & b_{q,2} & \dots & b_{q,r} \end{pmatrix}$$

に対して，クロネッカー積はテンソル積を与える．

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \dots & a_{2,n}B \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & a_{m,2}B & \dots & a_{m,n}B \end{pmatrix}$$

実際，線形作用素であることは明らかで，次の通りテンソル積の定義式(5)を満たす．

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(|x\rangle \otimes |y\rangle) &= \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \dots & a_{2,n}B \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & a_{m,2}B & \dots & a_{m,n}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 |y\rangle \\ x_2 |y\rangle \\ \vdots \\ x_n |y\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j) \cdot B |y\rangle \\ (\sum_{j=1}^n a_{2,j}x_j) \cdot B |y\rangle \\ \vdots \\ (\sum_{j=1}^n a_{m,j}x_j) \cdot B |y\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A |x\rangle)_1 \cdot B |y\rangle \\ (A |x\rangle)_2 \cdot B |y\rangle \\ \vdots \\ (A |x\rangle)_m \cdot B |y\rangle \end{pmatrix} = (A |x\rangle) \otimes (B |y\rangle) \end{aligned}$$

Lemma 4.

(i) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$
(ii) $(A \otimes B)^* = (A^* \otimes B^*)$
(iii) $\mathrm{Tr}(A \otimes B) = (\mathrm{Tr}\, A)(\mathrm{Tr}\, B)$
(iv) $a \in \mathbb{C}$, $|a\rangle$ が A の固有値・固有ベクトル，$b \in \mathbb{C}$, $|b\rangle$ が B の固有値・固有ベクトル
$\implies ab$, $|a\rangle \otimes |b\rangle$ は $A \otimes B$ の固有値・固有ベクトル
(v) $A \geq 0$, $B \geq 0 \implies A \otimes B \geq 0$

（証明）(i) 次式と線形拡張の議論よりOK.

$$(A \otimes B)(C \otimes D)(|x\rangle \otimes |y\rangle) = (A \otimes B)(C\,|x\rangle \otimes D\,|y\rangle) = AC\,|x\rangle \otimes BD\,|y\rangle = (AC \otimes BD)(|x\rangle \otimes |y\rangle)$$

(ii) 次式と拡張の議論よりOK.

$$\begin{aligned} \langle (A \otimes B)(x \otimes y), (z \otimes w) \rangle &= \langle (x \otimes y), (A \otimes B)^*(z \otimes w) \rangle \\ \langle (A \otimes B)(x \otimes y), (z \otimes w) \rangle &= \langle (Ax \otimes By), (z \otimes w) \rangle = \langle Ax, z \rangle \langle By, w \rangle = \langle x, A^* z \rangle \langle y, B^* w \rangle \\ &= \langle (x \otimes y), (A^* z \otimes B^* w) \rangle = \langle (x \otimes y), (A^* \otimes B^*)(z \otimes w) \rangle \end{aligned}$$

(iii) $\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \langle e_i \otimes f_j |\, (A \otimes B)\, | e_i \otimes f_j \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \langle e_i |\, A\, | e_i \rangle \langle f_j |\, B\, | f_j \rangle = (\mathrm{Tr}\, A)(\mathrm{Tr}\, B)$
(iv) $(A \otimes B)(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (A\,|a\rangle \otimes B\,|b\rangle) = (a\,|a\rangle \otimes b\,|b\rangle) = ab\,|a\rangle \otimes |b\rangle$
(v) $A \geq 0$, $B \geq 0$ より，$A = C^* C$, $B = D^* D$ とかけ，$A \otimes B = (C \otimes D)^*(C \otimes D) \geq 0$

6.10 $\mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ の基底

- （復習）Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の基底を $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{m}$ とするとき，$\mathcal{H}$ 上の作用素 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ の展開表現

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \langle e_i| A |e_j\rangle |e_i\rangle\langle e_j|$$

  より，$\{\, |e_i\rangle\langle e_j| \mid i,j = 1,\dots,m\}$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の基底である（第3回，2.4）
- さらに，Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ の基底を $\{|f_k\rangle\}_{k=1}^{n}$ とすると，$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ の基底は $\{|e_i\rangle \otimes |f_k\rangle \mid i = 1,\dots,m,\ k = 1,\dots,n\}$ であり，

$$\langle e_j \otimes f_l| = \langle e_j| \otimes \langle f_l|$$

  （線形汎関数として両者が等しいことが容易に分かる）に注意すると，

$$|e_i \otimes f_k\rangle \langle e_j \otimes f_l| = |e_i\rangle\langle e_j| \otimes |f_k\rangle\langle f_l| \quad (i,j = 1,\dots,m,\ k,l = 1,\dots,n)$$

  が $\mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ の基底になる．すなわち，

任意の $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ は

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a^{i,j,k,l} |e_i\rangle\langle e_j| \otimes |f_k\rangle\langle f_l| \tag{7}$$

の形に一意的に表される．

6.11 合成系

合成系の記述

(i) Hilbert空間$\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$で表される系の合成系は$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$で記述される．すなわち，
- 合成系上の状態は密度作用素$\rho_{AB} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$で一意的に表現される
- 合成系上の測定は$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$上のPOVMで表される

(ii) $\mathcal{H}_A$上の状態を$\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A)$，$\mathcal{H}_B$上の状態を$\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$が独立に準備されているとき，合成系の状態はテンソル積$\rho \otimes \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$で記述される．

(iii) $\mathcal{H}_A$上の測定(POVM) $M = \{M_x\}_{x \in \mathcal{X}}$と，$\mathcal{H}_B$上の測定(POVM) $N = \{N_y\}_{y \in \mathcal{Y}}$を独立に行うとき，合成系の測定(POVM)としては$\{M_x \otimes N_y\}_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$になる．

Example 2 (独立な状態準備と，独立な測定の場合).

$$P(x,y) = \mathrm{Tr}(\rho \otimes \sigma)(M_x \otimes N_y) = \mathrm{Tr}\,\rho M_x \cdot \mathrm{Tr}\,\sigma N_y = P_M^{\rho}(x) \cdot P_N^{\sigma}(y)$$

測定値(x,y)の従う分布は独立になる．

Example 3 (一方の系を測定しない場合). 何も測定しない状況を「常に測定値の目盛りが同じ値を指し続ける測定」と考えれば POVM $\{I\}$と見なせる．上記(iii)において，系$\mathcal{H}_A$のみに測定を行い，系$\mathcal{H}_B$に何も測定をしない状況では，合成系のPOVMは$\{M_x \otimes I\}_{x, \in \mathcal{X}}$で表される．合成系の状態が$\rho_{AB}$であるとき，

$$P(x) = \mathrm{Tr}[\rho_{AB}(M_x \otimes I)] \tag{8}$$

$\rho_{AB} = \rho \otimes \sigma$であるとき，

$$P(x) = \mathrm{Tr}[(\rho \otimes \sigma)(M_x \otimes I)] = \mathrm{Tr}\,\rho M_x \cdot \mathrm{Tr}\,\sigma = \mathrm{Tr}\,\rho M_x$$