

2020年7月15日

量子情報数理特論
(第10回) 量子通信路

電気通信大学 大学院情報理工学研究科

小川朋宏

9 量子通信路

(課題)

- (1) 量子通信路の満たすべき条件として、正值性では不十分で、完全正值性が要請される．なぜか？
- (2) CPTP 写像の三条件と，それらを要請するモチベーションを述べよ
- (3) Kraus表現のメリットを述べよ
- (4) Stinespring表現のメリットを述べよ
- (5) Choi行列の定義を述べよ
- (6) Choi行列を用いるメリットを述べよ

9.1 量子通信路に関する理論のアウトライン

- 条件付き確率 $W(y|x)$ ($x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$) は **(古典) 通信路 (channel)** を与える.

$$\mathcal{E}_W : P \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \mapsto PW \in \mathcal{P}(\mathcal{Y}) \quad \left(PW(y) := \sum_{x \in \mathcal{X}} P(x)W(y|x) \right)$$

古典通信路は古典的ノイズやデータ処理を記述する概念で、次の条件を満足する.

- (i) **アファイン (確率の凸結合を保存する)** : 確率 $(t, 1-t)$ のコインを振って、分布 P または Q に従うデータを入力したら、出力側でも同じ割合の凸結合になる.

$$\mathcal{E}_W(tP + (1-t)Q) = t\mathcal{E}_W(P) + (1-t)\mathcal{E}_W(Q)$$

- (ii) **正值性 (関数の正值性を保存する)** : これが満たされないとマイナスの確率が出てきちゃう.
- (iii) **確率保存 (関数の和を保存する)**
- **量子通信路 (quantum channel) / 量子操作 (quantum operation)** は古典通信路の対応物であり、**4つの同等な記述方法がある**.
 - (a) CPTP 写像 : 入力系とエンタングルしているかも知れない外界系も含めて、密度作用素が密度作用素に写像されるための最低限の要請 (量子通信路の公理的記述)
 - (b) Kraus 表現 : 数学的に計算しやすい表式、完全正值性が一発で確認できる
 - (c) Stinespring 表現 : シュレーディンガー方程式に従う物理的な状態変化 (ユニタリ発展) に対応
 - (d) Choi 行列 : 量子通信路と 1対1 に対応する半正定値行列, 量子通信路を指定する標準的なパラメータ, シミュレーションなどでも有用
- 同等性の証明手順 : (c) $\iff$ (b) $\implies$ (a) $\implies$ (d) $\implies$ (b)

9.2 CPTP 写像

Definition 1. 写像 $\mathcal{E} : X_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{E}(X_A) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ が以下の条件を満たすとき, **CPTP 写像 (Completely Positive and Trace Preserving map)** とよぶ.

(i) 線形性 : $\forall a, \forall b \in \mathbb{C}, \forall X_A, \forall Y_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ に対して

$$\mathcal{E}(aX_A + bY_A) = a\mathcal{E}(X_A) + b\mathcal{E}(Y_A) \quad (1)$$

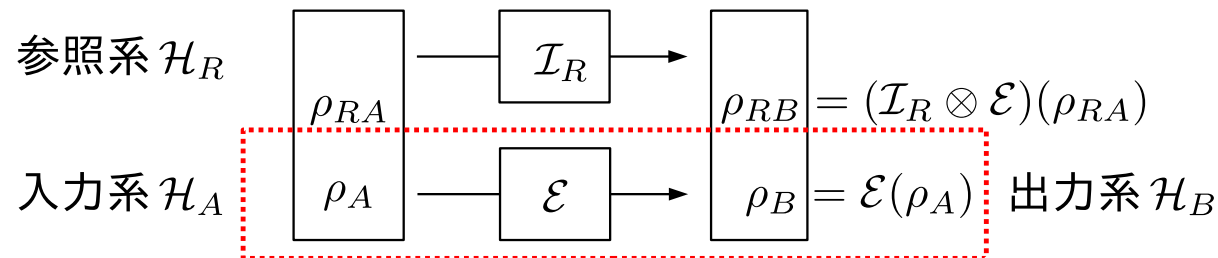
(ii) 完全正值性 (Complete Positivity) : 任意の系 $\mathcal{H}_R$ と $\forall X_{RA} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_A)$ について

$$X_{RA} \geq 0 \implies (\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E})(X_{RA}) \geq 0 \quad (2)$$

(iii) トレース保存 (Trace Preserving) : $\forall X_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ に対して

$$\text{Tr}[\mathcal{E}(X_A)] = \text{Tr}[X_A] \quad (3)$$

- (ii) で $\mathcal{H}_R = \mathbb{C}$ とすれば, (ii)' 正值性 : $X_A \geq 0 \implies \mathcal{E}(X_A) \geq 0$ が導かれる.



完全正值性は, 入力系 $\mathcal{H}_A$ とエンタングルしているかも知れない**外界系 $\mathcal{H}_R$ (参照系, reference system)** も含め, 密度作用素が密度作用素に写像されるための要請である.

- Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の密度作用素の集合を

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{ \rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid \rho \geq 0, \text{Tr } \rho = 1 \}$$

とする．CPTP 写像 $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ について，特に，

$$\rho_A \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \implies \mathcal{E}(\rho_A) \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$$

である．実際，正值性(ii)'より $\mathcal{E}(\rho_A) \geq 0$ ，トレース保存条件(iii)より $\text{Tr } \mathcal{E}(\rho_A) = 1$ が示される．

- 定義域を密度作用素の集合 $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ に制限した写像

$$\mathcal{E} : \rho_A \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \longmapsto \mathcal{E}(\rho_A) \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_B) \quad (4)$$

を CPTP 写像 / 量子通信路 (quantum channel) / 量子操作 (quantum operation) とよぶことも多い．

- 逆に，制限された写像(4)は，線形拡大により一意に $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ を定める．

実際，極化形式：

$$|x\rangle\langle y| = \frac{1}{2} \{ |a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b| + \sqrt{-1}(|c\rangle\langle c| - |d\rangle\langle d|) \}$$

$$|a\rangle := \frac{|x\rangle + |y\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |b\rangle := \frac{|x\rangle - |y\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |c\rangle := \frac{|x\rangle + \sqrt{-1}|y\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |d\rangle := \frac{|x\rangle - \sqrt{-1}|y\rangle}{\sqrt{2}}$$

により，

$$\mathcal{E}(|x\rangle\langle y|) = \frac{1}{2} [\mathcal{E}(|a\rangle\langle a|) - \mathcal{E}(|b\rangle\langle b|) + \sqrt{-1} \{ \mathcal{E}(|c\rangle\langle c|) - \mathcal{E}(|d\rangle\langle d|) \}]$$

であり， $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ の基底 $|i\rangle\langle j|$ の行き先 $\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)$ は， $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A)$ における $\mathcal{E}$ の値のみで定まる．

9.3 Kraus表現

Definition 2. 写像 $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ が

$$\mathcal{E}(X_A) = \sum_{k=1}^m E_k X_A E_k^* \quad (E_k : \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_B, k = 1, \dots, m) \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^m E_k^* E_k = I_A \quad (6)$$

と書けるとき, $\mathcal{E}$ は **Kraus表現 / operator sum表現**を持つという. $\{E_k\}_{k=1}^m$ は Kraus operator とよばれる.

Lemma 1. (5)で定義される写像 $\mathcal{E}$ について以下は同値である. ((6)はトレース保存条件である)

(i) $\forall X_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A), \text{Tr } \mathcal{E}(X_A) = \text{Tr } X_A$ (トレース保存)

(ii) $\mathcal{E}$ は(6)をみたす.

(証明) $\text{Tr}[\mathcal{E}(X_A)] = \text{Tr} \left[\sum_{k=1}^m E_k X_A E_k^* \right] = \text{Tr} \left[\left(\sum_{k=1}^m E_k^* E_k \right) X_A \right]$ であるから, (ii) $\Rightarrow$ (i)は明らか.

一方で, この式より, (i)を仮定すると,

$$\left\langle \left\langle \sum_k E_k^* E_k - I_A, X_A \right\rangle \right\rangle = \text{Tr} \left[\left(\sum_k E_k^* E_k - I_A \right) X_A \right] \stackrel{(i)}{=} 0 \quad (\forall X_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A))$$

が成立するので(ii)が成り立つ.

□

Lemma 2. Kraus表現を持つ写像はCPTP写像である。

(証明) $\mathcal{E}$ がKraus表現(5)を持つと仮定する. (i) 線形性 : 明らか. (ii) 完全正值性 :

$$(\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E})(X_{RA}) = \sum_k (I_R \otimes E_k) X_{RA} (I_R \otimes E_k)^* \quad (7)$$

を示す. このことは, $X_{RA} = X_R \otimes X_A$ のときに確認すれば十分である :

$$(\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E})(X_R \otimes X_A) = X_R \otimes \mathcal{E}(X_A) = X_R \otimes \left(\sum_k E_k X_A E_k^* \right) = \sum_k (I_R \otimes E_k) (X_R \otimes X_A) (I_R \otimes E_k)^*$$

(7)式より, 半正定値性の性質 ($A \geq 0 \Rightarrow C^* A C \geq 0$, $A \geq 0, B \geq 0 \Rightarrow A + B \geq 0$) を用いると, 完全正值性(ii)が示される.

トレース保存条件(iii)はLemma 1で確認した. □

9.4 Stinespring表現

Definition 3. 写像 $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ が, 等距離作用素 $V : \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$ を用いて

$$\mathcal{E}(X_A) = \text{Tr}_E [V X_A V^*] \quad (8)$$

と書けるとき, $\mathcal{E}$ はStinespring表現を持つという. $\mathcal{H}_E$ は環境系 (environment system) とよばれる.

9.5 Kraus表現とStinespring表現の等価性

Lemma 3. Kraus表現を持つ写像はStinespring表現で表すことができる。

(証明) $\mathcal{E}$ がKraus表現(5)をもつと仮定する。
 $\mathcal{H}_E$ を正規直交基底 $\{|k\rangle\}_{k=1}^m$ を持つ m 次元 Hilbert 空間とし、作用素 $V : \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$ を

$$V : |x\rangle \mapsto V|x\rangle := \sum_{k=1}^m E_k |x\rangle \otimes |k\rangle$$

により定義すると、 V は等距離作用素となる：

$$\begin{aligned} \langle Vx | Vy \rangle &= \left(\sum_{k=1}^m E_k |x\rangle \otimes |k\rangle \right)^* \left(\sum_{\ell=1}^m E_\ell |y\rangle \otimes |\ell\rangle \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m \langle x | E_k^* E_\ell | y \rangle \langle k | \ell \rangle \\ &= \sum_{k=1}^m \langle x | E_k^* E_k | y \rangle = \langle x | y \rangle \end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned} \text{Tr}_E [V |x\rangle\langle y| V^*] &= \text{Tr}_E \left[\left(\sum_{k=1}^m E_k |x\rangle \otimes |k\rangle \right) \left(\sum_{\ell=1}^m E_\ell |y\rangle \otimes |\ell\rangle \right)^* \right] \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m \text{Tr}_E [E_k |x\rangle\langle y| E_\ell^* \otimes |k\rangle\langle \ell|] \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m E_k |x\rangle\langle y| E_\ell^* \cdot \text{Tr}[|k\rangle\langle \ell|] = \sum_{k=1}^m E_k |x\rangle\langle y| E_k^* \end{aligned}$$

であるので、 $\mathcal{E}$ はStinespring表現

$$\mathcal{E}(X_A) = \text{Tr}_E [V X_A V^*] \quad (9)$$

を持つことが示された。 $\square$

Lemma 4. Stinespring表現を持つ写像はKraus表現で表すことができる。

(証明) $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ が, 環境系 $\mathcal{H}_E$ と等距離作用素 $V : \mathcal{H}_A \longrightarrow \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$ を用いて,

$$\mathcal{E}(X_A) = \text{Tr}_E [V X_A V^*]$$

で表せると仮定する. 部分トレースの計算式より,

$$\mathcal{E}(X_A) = \sum_k \underbrace{(I_B \otimes \langle k|) V}_{:= E_k} X_A \underbrace{V^* (I_B \otimes |k\rangle)}_{E_k^*}$$

と書ける. ここで

$$E_k := (I_B \otimes \langle k|) V$$

とおく.

$$\mathcal{H}_A \xrightarrow{V} \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E \xrightarrow{I_B \otimes \langle k|} \mathcal{H}_B \otimes \mathbb{C} = \mathcal{H}_B$$

に注意すると, E_k は $\mathcal{H}_A$ から $\mathcal{H}_B$ への線形作用素で,

$$\mathcal{E}(X_A) = \sum_k E_k X_A E_k^*$$

が成り立つ. 一方で,

$$\begin{aligned} \sum_k E_k^* E_k &= \sum_k V^* (I_B \otimes |k\rangle) (I_B \otimes \langle k|) V \\ &= V^* \left(I_B \otimes \sum_k |k\rangle \langle k| \right) V \\ &= V^* V \\ &= I_A \end{aligned}$$

であるから, $\mathcal{E}$ はKraus表現を持つ. □

9.6 Choi行列, Choi–Jamiołkowski 同型 (isomorphism)

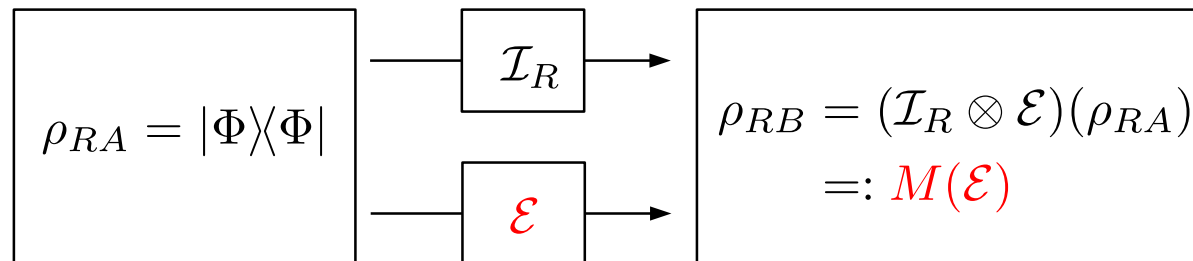
- 系 $\mathcal{H}_A$ から系 $\mathcal{H}_B$ への CPTP 写像全体を

$$CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B) := \{ \mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B) \mid \mathcal{E} \text{ は CPTP 写像} \}$$

とおく. $d := \dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_R$ となる参照系 $\mathcal{H}_R$ を考え, **最大エンタングル状態を以下で固定する**:

$$|\Phi\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |i\rangle \otimes |i\rangle \in \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_A$$

- この最大エンタングル状態を, 合成通信路 $\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E}$ で操作した出力側の密度作用素を考える.



参照系 $\mathcal{H}_R$ には何もしていないので,

$$\mathrm{Tr}_B M(\mathcal{E}) = \mathrm{Tr}_B[\rho_{RB}] = \mathrm{Tr}_A[\rho_{RA}] = \frac{1}{d} I_R$$

- この性質を満たす $\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_B$ 上の半正定値作用素の集合を

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_B) := \{ M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_B) \mid M \geq 0, \mathrm{Tr}_B[M] = \frac{1}{d} I_R \} \quad (\mathcal{H}_A \simeq \mathcal{H}_R) \quad (10)$$

とおく.

Theorem 1 (量子通信路のパラメータ表現). 写像

$$\mathcal{E} \in CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B) \mapsto M(\mathcal{E}) := (\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E})(|\Phi\rangle\langle\Phi|) \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B) \quad (11)$$

は全単射かつアファイン (Choi–Jamiołkowski isomorphism). $M(\mathcal{E})$ は Choi 行列とよばれる.

(アファイン性) $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ の凸結合 $t\mathcal{E} + (1-t)\mathcal{F} \in CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ が以下で定義される.

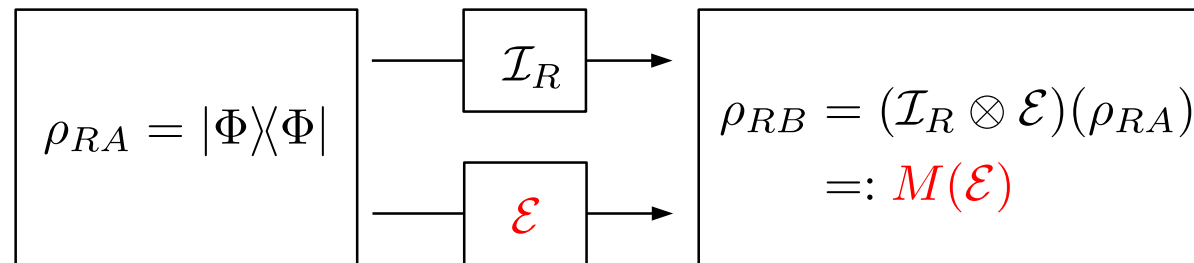
$$(t\mathcal{E} + (1-t)\mathcal{F})(X_A) := t\mathcal{E}(X_A) + (1-t)\mathcal{F}(X_A) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$t\mathcal{E} + (1-t)\mathcal{F}$ は確率 t で $\mathcal{E}$, 確率 $1-t$ で $\mathcal{F}$ に従って量子状態が変化した場合の量子通信路である.

Lemma 5. (11) はアファイン写像である (凸結合を凸結合に移す).

$$\begin{aligned} \text{(証明)} \quad M(t\mathcal{E} + (1-t)\mathcal{F}) &= (\mathcal{I}_R \otimes (t\mathcal{E} + (1-t)\mathcal{F}))(|\Phi\rangle\langle\Phi|) \\ &= t(\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E})(|\Phi\rangle\langle\Phi|) + (1-t)(\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{F})(|\Phi\rangle\langle\Phi|) = tM(\mathcal{E}) + (1-t)M(\mathcal{F}) \quad \square \end{aligned}$$

9.7 Choi行列の直感的理解



Choi行列の直感的理解

$$|\Phi\rangle\langle\Phi| = \frac{1}{d} \left(\sum_{i=1}^d |i\rangle \otimes |i\rangle \right) \left(\sum_{j=1}^d \langle j| \otimes \langle j| \right) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d |i\rangle\langle j| \otimes |i\rangle\langle j|$$

より, Choi行列 $M(\mathcal{E})$ の Kronecker 積表現は以下で与えられる.

$$M(\mathcal{E}) = (\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E})(|\Phi\rangle\langle\Phi|) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d |i\rangle\langle j| \otimes \mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) \simeq \frac{1}{d} \left[\begin{array}{c} \mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) \end{array} \right] \quad (12)$$

最後の式は i, j ブロックに行列 $\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)$ を並べた行列である.

- $M(\mathcal{E})$ は各ブロックに $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ の基底 $|i\rangle\langle j|$ の行き先 $\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)$ を並べた行列であるから, 写像 $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ の情報をすべて含んでいる.
- アフィン性を有していることも容易に分かる.

9.8 Choi–Jamiołkowski 同型の証明（Choi 行列から Kraus 表現の導出）

Lemma 6. (11) は $CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ から $\mathcal{M}(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_B)$ への単射である。

(証明) 最初に $\mathcal{E} \in CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B) \Rightarrow M(\mathcal{E}) \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_B)$ を示す. $\mathcal{E} \in CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ を仮定すると, $M(\mathcal{E})$ の定義(11)と完全正值性より $M(\mathcal{E}) \geq 0$ である. 一方, (12)とトレース保存条件より,

$$\mathrm{Tr}_B[M(\mathcal{E})] = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d |i\rangle\langle j| \otimes \mathrm{Tr}[\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)] = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d |i\rangle\langle j| \delta_{ij} = \frac{1}{d} I_R$$

が成り立つので $M(\mathcal{E}) \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_B)$ が示された.

単射であることは(12)の表現より明らかである. すなわち, $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ について, (12)より $M(\mathcal{E}) = M(\mathcal{F})$ ならば $\forall i, j, \mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) = \mathcal{F}(|i\rangle\langle j|)$ である. これは $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ を意味する. $\square$

Lemma 7. (11) は全射である.

(証明) (Step 1) $M \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_B)$ の Kronecker 積表現

$$M = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d |i\rangle\langle j| \otimes M_{i,j} = \frac{1}{d} \left[\begin{array}{c} M_{ij} \end{array} \right]_{ij}$$

を考え, 基底 $|i\rangle\langle j| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ の行き先を $M_{i,j}$ とする写像を $\mathcal{E}_M(|i\rangle\langle j|) := M_{i,j}$ とする.

作り方と(12)から $M(\mathcal{E}_M) = (\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E}_M)(|\Phi\rangle\langle\Phi|) = M$ となることは明らかである.

(Step 2) $\mathcal{E}_M$ が CPTP 写像であることを以下の補題で示す. □

Lemma 8. $M \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_B)$ ならば, 上の $\mathcal{E}_M$ は Kraus 表現をもつ.
(よって, Lemma 2 より $\mathcal{E}_M$ は CPTP 写像である)

(証明) $M \geq 0$ であるから, $|\Psi_k\rangle \in \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_B$ を用いて

$$M = \sum_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k| \quad (13)$$

と書ける (例えば, M の固有値分解を考えればよい). ここで, $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ を $\mathcal{H}_A$ から $\mathcal{H}_B$ への線形写像全体とすると,

$$E \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B) \mapsto (I_R \otimes E) |\Phi\rangle \in \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_B \simeq \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

は 1 対 1 で線形な対応を与える (同型対応, 第 9 回, Lemma 3 (iv)). したがって, 各 k について $E_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ が存在して, $|\Psi_k\rangle = (I_R \otimes E_k) |\Phi\rangle$ と表わされる. これより, (13) は以下のように書ける.

$$M = \sum_k (I_R \otimes E_k) |\Phi\rangle\langle\Phi| (I_R \otimes E_k)^* = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d |i\rangle\langle j| \otimes \underbrace{\left(\sum_k E_k |i\rangle\langle j| E_k^* \right)}_{\mathcal{E}_M(|i\rangle\langle j|)} \quad (14)$$

よって、 $\mathcal{E}_M$ は以下の式で与えられることが示された.

$$\mathcal{E}_M(X_A) = \sum_k E_k X_A E_k^*$$

(14) で部分トレース Tr_B をとると,

$$\frac{1}{d} I_R \stackrel{(a)}{=} \text{Tr}_B M = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d |i\rangle\langle j| \cdot \text{Tr}_B \mathcal{E}_M(|i\rangle\langle j|)$$

ここで, (a) の部分は $\mathcal{M}(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_B)$ の定義による. 成分を比較すると,

$$\text{Tr} \mathcal{E}_M(|i\rangle\langle j|) = \delta_{ij}$$

これはトレース保存条件に他ならない. 以上より, $\mathcal{E}_M$ が Kraus 表現を持つことが示された. □