2021年4月21日

量子情報数理特論
（第3回）作用素の表現行列，トレース，エルミート作用素と固有値分解

電気通信大学 大学院情報理工学研究科

小川朋宏

2　作用素の表現行列，トレース，エルミート作用素と固有値分解

(課題1) 作用素の表現行列

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素 A について，

(1) 正規直交基底 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_n\rangle$ による表現行列を答えよ．

(課題2) トレース

(1) 正方行列のトレースを言葉で述べよ

(2) ベクトルの空間上の線形作用素について，トレースの定義を言葉で（簡潔に）述べよ

(課題3) エルミート作用素と固有値分解

Hilbert 空間上の線形作用素について，

(1) エルミート共役の定義をのべよ．

(2) エルミート作用素の定義をのべよ．

(3) 数ベクトル空間ではエルミート共役はどうなるか？言葉で簡潔に述べよ

(4) 半双線形形式を用いてエルミート共役を定義するのはなぜか？

（注意）

- 入力・出力のベクトル空間が同じ線形作用素 $A : V \to V$ を，ベクトル空間 V 上の線形作用素 A とよびます．
- 特に，V が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ のとき，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素 A とよびます．
- LaTeX の記号
  $|e_i\rangle$ は`\ket{e_i}`，$\langle e_i|$ は`\bra{e_i}`，A^* は`A^*`

2.1 ケットベクトルの成分表示

Definition 1. ヒルベルト空間$\mathcal{H}$の基底$|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_n\rangle$が

$$\langle e_i \,|\, e_j \rangle = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad \text{（クロネッカーのデルタ）}$$

を満たすとき（i.e., 互いに直交してノルムが1），正規直交基底 (orthonormal basis) であるという．

ケットベクトルの成分表示

$|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_n\rangle$を正規直交基底とすると，ケットベクトル$|x\rangle \in \mathcal{H}$の成分表示が得られる．

$$|x\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \, |e_j\rangle\,, \quad x_i = \langle e_i \,|\, x\rangle \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

実際，最初の式の両辺に$\langle e_i|$をかけることで，

$$\langle e_i \,|\, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \, \langle e_i \,|\, e_j\rangle = x_i$$

ただし，クロネッカーデルタ$\langle e_i \,|\, e_j\rangle = \delta_{i,j}$の性質より，
$j = i$となる項だけ生き残り，その他の項はゼロになることを使った．

2.2 完全性条件

Lemma 1. 任意の正規直交基底 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_n\rangle$ について，

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\!\langle e_i| = I \quad \text{（恒等作用素）}$$

（証明）任意の $|x\rangle \in \mathcal{H}$ について，上式の左辺と右辺は同じ作用をする．

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\!\langle e_i|\right)|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle \langle e_i \mid x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i |e_i\rangle = |x\rangle = I|x\rangle$$

2.3　作用素の表現行列とブラケット記法

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素 $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ について，
基底 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_n\rangle$ に関する表現行列 $\hat{A} = [\hat{A}_{ij}]$ は次式で定義される．

$$A|e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \hat{A}_{kj} |e_k\rangle \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

表現行列のブラケット表現

$|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_n\rangle$ を正規直交基底とすると

$$\hat{A}_{ij} = \langle e_i| A |e_j\rangle$$

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle e_i| A |e_j\rangle |e_i\rangle\langle e_j| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{A}_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|$$

実際，表現行列の定義 (1) の両辺に $\langle e_i|$ をかけることで，

$$\langle e_i| A |e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \hat{A}_{kj} \langle e_i | e_k\rangle = \hat{A}_{ij}$$

完全性条件より，

$$A = IAI = \left(\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|\right) A \left(\sum_{j=1}^{n} |e_j\rangle\langle e_j|\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle e_i| A |e_j\rangle |e_i\rangle\langle e_j|$$

正規直交基底 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_n\rangle$ による成分表示：

$$|x\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j |e_j\rangle$$

で，$|x\rangle$ と成分 $[x_j]$ の対応を $\simeq$ で表す．$|e_i\rangle\langle e_j|$ は作用素のなすベクトル空間の基底である．

$$|e_i\rangle\langle e_j| \simeq \begin{array}{c} \\ \\ i\text{-th} \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \qquad\qquad j\text{-th} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i\text{-th} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} j\text{-th} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

すなわち，A は $|e_i\rangle\langle e_j|$ により一意に展開される．

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle e_i| A |e_j\rangle |e_i\rangle\langle e_j|$$

$$\simeq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i\text{-th} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} j\text{-th} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \langle e_i| A |e_j\rangle & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle e_1| A |e_1\rangle & \cdots & \langle e_1| A |e_j\rangle & \ldots & \langle e_1| A |e_n\rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle e_i| A |e_1\rangle & \cdots & \langle e_i| A |e_j\rangle & \ldots & \langle e_i| A |e_n\rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle e_n| A |e_1\rangle & \cdots & \langle e_n| A |e_j\rangle & \ldots & \langle e_n| A |e_n\rangle \end{pmatrix}$$

2.5 トレース (trace)

Definition 2 (行列のトレース). $n \times n$ 正方行列 $A = [A_{ij}]$ について，トレースを対角和で定義：

$$\mathrm{Tr}\, A := \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

トレースの性質

Lemma 2.

(i) （線形性）$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}\, A + \mathrm{Tr}\, B$, $\mathrm{Tr}(cA) = c\,\mathrm{Tr}\, A$ $(c \in \mathbb{C})$

(ii) （巡回性） $\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, BA$ (cyclic property)　（A：$m \times n$ 行列，B：$n \times m$ 行列）

（証明）(i) は自明．(ii) $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$, $(BA)_{k\ell} = \sum_{i=1}^{m} B_{ki} A_{i\ell}$ であるから，

$$\mathrm{Tr}\, AB = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} B_{ki} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} = \mathrm{Tr}\, BA$$

2.6　（表現によらない）線形作用素のトレース

ベクトル空間 V 上の線形作用素 $A : V \longrightarrow V$ を考える．V の基底 $[e_1, e_2, \ldots, e_n]$ に関して表現行列 $\hat{A}$ は

$$A[e_1, e_2, \ldots, e_n] = [e_1, e_2, \ldots, e_n]\hat{A}$$

で定義される．別の基底 $[e'_1, e'_2, \ldots, e'_n]$ への基底の変換行列 S

$$[e'_1, e'_2, \ldots, e'_n] = [e_1, e_2, \ldots, e_n]S$$

を用いると，表現行列の基底変換ルール

$$\hat{A} = S\hat{A}'S^{-1}$$

が成り立つ．これより，表現行列のトレースは基底のとり方に依存しない．

$$\mathrm{Tr}\,\hat{A} = \mathrm{Tr}\,S\hat{A}'S^{-1} = \mathrm{Tr}\,S^{-1}S\hat{A}' = \mathrm{Tr}\,\hat{A}'$$

線形作用素のトレース

Definition 3. 線形作用素 $A : V \longrightarrow V$ のトレースは表現行列のトレースとして定義される．
特にHilbert空間においては，正規直交基底 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_n\rangle$ を用いて，

$$\mathrm{Tr}\,A = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i| A |e_i\rangle$$

（注意）線形作用素のトレースについても，Lemma 2（トレースの性質）が成立．

2.7 （表現によらない）線形作用素のdeterminant

Definition 4 (行列のdeterminant). $n \times n$ 正方行列 $A = [A_{ij}]$ について

$$\det A := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\mathsf{sign}(\sigma)} A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{n\sigma(n)} \quad (\mathfrak{S}_n \text{ は } n \text{ 次対称群の集合})$$

Lemma 3 (determinantの性質).

(i) （積ルール） $\det[AB] = (\det A) \cdot (\det B)$

(ii) （逆行列）$\det[A^{-1}] = (\det A)^{-1}$ 　（積ルールと $A \cdot A^{-1} = I$ より）

この補題から，トレースと同様，determinantも基底のとり方に依存しないことが分かる.

$$\det \hat{A} = \det[S\hat{A}'S^{-1}] = (\det S) \cdot (\det \hat{A}') \cdot (\det S)^{-1} = \det \hat{A}'$$

線形作用素のdeterminant

Definition 5. 線形作用素 $A : V \longrightarrow V$ のdeterminantは表現行列のdeterminantとして定義される.

（注意）線形作用素のdeterminantについても，Lemma 3が成立.

2.8　半双線型形式(sesquilinear form)

Definition 6 (半双線型形式). Vをスカラー$\mathbb{C}$上のベクトル空間とする.
ベクトル２つに対してスカラーを返す写像

$$\varphi : (v, w) \in V \times V \longmapsto \varphi(v, w) \in \mathbb{C}$$

が以下の条件を満たすとき半双線型形式(sesquilinear form)であるという.

(i) （右側について線形）$\varphi(u, c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 \varphi(u, v_1) + c_2 \varphi(u, v_2)$
(ii) （複素共役でひっくり返る）$\overline{\varphi(u, v)} = \varphi(v, u)$

（注意）(i)(ii)より半双線形形式は左側について共役線形である.

$$\varphi(c_1 u_1 + c_2 u_2, v) = \overline{\varphi(v, c_1 u_1 + c_2 u_2)} = \overline{c_1 \varphi(v, u_1) + c_2 \varphi(v, u_2)} = \overline{c_1} \varphi(u_1, v) + \overline{c_2} \varphi(u_2, v)$$

- 半双線型形式：内積の定義において正定値性(iii)を除いたもの（内積は半双線形形式の一種）
- 何がうれしいの？
  - Hilbert空間では，リースの表現定理を使うことで，半双線型形式と線形作用素が1対1対応する
  - 作用素の性質を半双線型形式（値はスカラー）の性質に置き換えて議論できる

(c.f.) 内積の正定値性(iii)：$\langle v, v \rangle \geq 0$（等号成立は$v = \vec{0}$のときに限る）

2.9 半双線型形式と線形作用素の1対1対応

Lemma 4. Hilbert空間$\mathcal{H}$上の半双線型形式$\varphi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$に対して，
線形作用素$A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$が一意に存在して

$$\varphi(x, y) = \langle x, Ay \rangle$$

（証明）いったん$|y\rangle \in \mathcal{H}$を固定する．$f_y(x) := \overline{\varphi(x, y)}$とおくと，$x$について線形汎関数になる．
よってリースの表現定理より，

$$f_y(x) = \langle z(y), x \rangle$$

となる$|z(y)\rangle \in \mathcal{H}$が各$|y\rangle \in \mathcal{H}$について一意に存在する．これにより，写像

$$A : y \in \mathcal{H} \longmapsto z(y) =: Ay \in \mathcal{H}$$

が定まる．Aが線形写像であることは容易に確かめられ，$f_y(x) = \langle Ay, x \rangle$となる．よって，

$$\varphi(x, y) = \overline{f_y(x)} = \overline{\langle Ay, x \rangle} = \langle x, Ay \rangle$$

Definition 7. 線形作用素 $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ に対して $\varphi(y, x) = \langle y, Ax\rangle$ とおくと半双線形形式になる．ここで $f(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ もまた半双線形形式であるから，

$$f(x, y) = \overline{\varphi(y, x)} = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle, \quad \forall \left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle \in \mathcal{H}$$

となる線形作用素 A^* が一意に存在する．A^* を A のエルミート共役作用素とよぶ．

正規直交基底 $\left|e_1\right\rangle, \left|e_2\right\rangle, \ldots, \left|e_n\right\rangle$ による成分表示では，エルミート共役 $\simeq$ 複素共役転置：

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle e_i\right| A \left|e_j\right\rangle \left|e_i\right\rangle\!\left\langle e_j\right| \quad \longleftrightarrow \quad A^* = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{\left\langle e_j\right| A \left|e_i\right\rangle} \left|e_i\right\rangle\!\left\langle e_j\right|$$

実際，$A\left|x\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle e_i\right| A \left|e_j\right\rangle \left|e_i\right\rangle \left\langle e_j \mid x\right\rangle$ より，ケットとブラの対応が反線形であることに注意して，

$$\left\langle Ax\right| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{\left\langle e_i\right| A \left|e_j\right\rangle\!\left\langle e_j \mid x\right\rangle} \left\langle e_i\right| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{\left\langle e_i\right| A \left|e_j\right\rangle} \left\langle x \mid e_j\right\rangle \left\langle e_i\right|$$

よって，

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{\left\langle e_i\right| A \left|e_j\right\rangle} \left\langle x \mid e_j\right\rangle \left\langle e_i \mid y\right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{\left\langle e_j\right| A \left|e_i\right\rangle} \left\langle x \mid e_i\right\rangle \left\langle e_j \mid y\right\rangle = \langle x, A^* y\rangle$$

2.11　エルミート共役の性質とエルミート作用素

Lemma 5 (エルミート共役の性質).

(i) エルミート共役は基底のとり方に依存しない概念である.
(ii) $(A^*)^* = A$
(iii) $(\alpha A)^* = \overline{a} A^*$
(iv) $(A+B)^* = A^* + B^*$
(v) $(AB)^* = B^* A^*$

（証明）定義で成分表示を使っていないことから(i)は明らか.
一方，成分表示ではエルミート共役は複素共役転置と見なせるので(ii)〜(v)も明らか.

エルミート作用素

Definition 8. $A^* = A$のとき，Aをエルミート作用素とよぶ.

Lemma 6 (トレースの性質).

(i) （線形性）$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B$, $\mathrm{Tr}(cA) = c\,\mathrm{Tr}\,A$ $(c \in \mathbb{C})$
(ii) （巡回性）$\mathrm{Tr}\,AB = \mathrm{Tr}\,BA$ (cyclic property)
(iii) $\mathrm{Tr}\,A^* = \overline{\mathrm{Tr}\,A}$
(iv) Aがエルミート作用素のとき$\mathrm{Tr}\,A \in \mathbb{R}$

（証明）(i) (ii)は再掲
(iii) (iv)は表現行列$\langle e_i|\,A\,|e_j\rangle$の性質を確認すると容易に確かめられる.

2.12　固有値と固有ベクトル

Definition 9. ベクトル空間 V 上の線形作用素 $A : V \longrightarrow V$ に対して，$x \in V$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ について

$$Ax = \lambda x \quad (x \neq 0) \tag{2}$$

となるとき，λ を A の固有値 (eigenvalue)，x を λ に対応する A の固有ベクトル (eigenvector) という．

Lemma 7. （Hilbert 空間上の）エルミート作用素の固有値は実数である．

（証明）$\lambda \in \mathbb{C}$ をエルミート作用素 A の固有値，$|x\rangle$ を対応する固有ベクトルとすると，

$$\begin{aligned} \langle x, Ax \rangle &= \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \\ &= \langle A^* x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \overline{\lambda} \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

よって，$\langle x, x \rangle \neq 0$ であるから，$\overline{\lambda} = \lambda$．これは λ が実数であることを意味する．

Lemma 8. エルミート作用素の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する．

（証明）$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ をエルミート作用素 A の異なる固有値，$|x\rangle$, $|y\rangle$ をそれぞれ固有ベクトルとすると，

$$\begin{aligned} \langle x, Ay \rangle &= \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle \\ &= \langle A^* x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

これより，

$$(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$$

$\lambda - \mu \neq 0$ であるから，$\langle x, y \rangle = 0$

2.13　エルミート作用素の固有ベクトルからなる正規直交基底

Theorem 1. $\mathcal{H}$ をHilbert空間 $(\dim\mathcal{H}=n)$，$A:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ をエルミート作用素とすると，A の固有ベクトルからなる正規直交基底 $|e_1\rangle,|e_2\rangle,\ldots,|e_n\rangle$ が存在する．

（証明）次元 n に関する帰納法で示す．（$n=1$ の場合）定理が成立することは明らかである．
（$n\geq 2$ の場合）$\lambda\in\mathbb{C}$ が A の固有値であることは，固有方程式

$$\det(\lambda I-A)=0$$

を満たすことと同値であり，固有方程式の解は複素数の範囲で重複を許して丁度 n 個存在．その中から固有値 λ を１つとってくると，(2) を満たす固有ベクトル $|x\rangle\neq 0$ が少なくとも１つ存在する．これを規格化して $|e_n\rangle=|x\rangle/\|x\|$ とおけば，$|e_n\rangle$ もまた固有ベクトルである．$|e_n\rangle$ の直交補空間を

$$\mathcal{K}=\{\,x\in\mathcal{H}\mid\langle e_n\,|\,x\rangle=0\,\}$$

とおくと，$x\in\mathcal{K}$ ならば $Ax\in\mathcal{K}$ である（i.e., $\mathcal{K}$ は A により不変）．実際，$x\in\mathcal{K}$ に対して，A のエルミート性により，

$$\langle e_n\,|\,Ax\rangle=\langle Ae_n\,|\,x\rangle=\langle\lambda e_n\,|\,x\rangle=\lambda\,\langle e_n\,|\,x\rangle=0$$

このことから，A を $\mathcal{K}$ に制限したエルミート作用素

$$A':x\in\mathcal{K}\longmapsto Ax\in\mathcal{K}$$

が定義される．$\dim\mathcal{K}=n-1$ であるから，帰納法の仮定より，A' の固有ベクトルからなる $\mathcal{K}$ の正規直交基底 $|e_1\rangle,|e_2\rangle,\ldots,|e_{n-1}\rangle$ が存在する．これらは $|e_n\rangle$ と直交する A の固有ベクトルでもあるから，$|e_1\rangle,|e_2\rangle,\ldots,|e_{n-1}\rangle,|e_n\rangle$ は A の固有ベクトルからなる正規直交基底である．

2.14 エルミート作用素の固有値分解

Theorem 2 (固有値分解定理). $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_n\rangle$ を A の固有ベクトルからなる正規直交基底とする．対応する固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とするとすると，

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |e_k\rangle\langle e_k| \tag{3}$$

（証明）線形作用素は基底の行き先で定まるので，正規直交基底 $|e_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ について (3) の両辺の作用が等しいことを示せばよい．まず固有値，固有ベクトルの定義から，

$$A|e_i\rangle = \lambda_i |e_i\rangle$$

一方で，

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k |e_k\rangle\langle e_k|\right)|e_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |e_k\rangle \langle e_k \mid e_i\rangle = \lambda_i |e_i\rangle$$

（注意）固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ には重複固有値があるかも知れない．
重複固有値を持つ場合，固有値分解は A に対して一意ではない．

2.15　固有値分解が一意ではない例

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とすると，固有値は $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ である（重複固有値）.

A は少なくとも二通りの固有値分解をもつ（実際には固有空間を回転する自由度がある）

$$
\begin{aligned}
A &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A &= 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$