

2021年5月26日

量子情報数理特論
(第7回) テンソル積空間, 合成系

電気通信大学 大学院情報理工学研究科

小川朋宏

6 テンソル積空間，合成系

(課題)

- (1) 横ベクトル $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ のクロネッカー積 $x \otimes y$ を求めよ (横ベクトルで解答)
- (2) 双線型写像の定義を述べよ
- (3) ベクトル空間のテンソル積空間について定義を述べよ
- (4) n 次元ベクトル空間 V と m 次元ベクトル空間 W のテンソル積空間 $V \otimes W$ の次元を答えよ
- (5) テンソル積の一意性とは何か? (数式を使わず簡単に)
- (6) Hilbert 空間のテンソル積空間について定義を述べよ
- (7) コンピュータプログラムで, 配列 $a[0], \dots, a[99]$ と配列 $b[0], \dots, b[99]$ のテンソル積を表現するには, どのようにすれば良いか?

(余談) テンソルの概念は機械学習 (AI) にも使われています. 深層学習のライブラリ tensorflow.

6.1 クロネッカー積 (テンソル積の例)

Definition 1 (クロネッカー積).

数ベクトル空間 $\mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^n$ のベクトルについて,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \color{red}{a_1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ \color{blue}{a_2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \color{green}{a_m} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{a_1}b_1 \\ \color{red}{a_1}b_2 \\ \vdots \\ \color{red}{a_1}b_n \\ \color{blue}{a_2}b_1 \\ \color{blue}{a_2}b_2 \\ \vdots \\ \color{blue}{a_2}b_n \\ \vdots \\ \color{green}{a_m}b_1 \\ \color{green}{a_m}b_2 \\ \vdots \\ \color{green}{a_m}b_n \end{pmatrix}$$

(例) $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$

$$(\mathbb{C}^2 \text{ 標準基底}) \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{C}^3 \text{ 標準基底}) \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これは $\mathbb{C}^6$ の標準基底である！ よって,

$$\mathbb{C}^6 = \text{span} \{ e_i \otimes f_j \mid e_i (i = 1, 2), f_j (j = 1, 2, 3) \}$$

このことを $\mathbb{C}^6 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ とかく.

6.2 双線型写像とテンソル積

Definition 2 (双線型写像). ベクトル空間 V, W の直積からベクトル空間 T への写像

$$f : (v, w) \in V \times W \mapsto f(v, w) \in T$$

が第1引数と第2引数のそれぞれについて線形であるとき, すなわち,

$$f(a_1 v_1 + a_2 v_2, w) = a_1 f(v_1, w) + a_2 f(v_2, w)$$

$$f(v, b_1 w_1 + b_2 w_2) = b_1 f(v, w_1) + b_2 f(v, w_2)$$

($v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$) が成立するとき, 双線型写像であるという.

Definition 3 (テンソル積). ベクトル空間 V, W の直積からベクトル空間 T への写像

$$f : (v, w) \in V \times W \mapsto f(v, w) \in T \quad \text{について}$$

(i) f は双線型写像である

(ii) V の基底 $\{e_i\}_{i=1}^m$, W の基底 $\{f_j\}_{j=1}^n$ に対して, $f(e_i, f_j)$ が T の基底である

であるとき,

- ベクトル空間 T をテンソル積空間とよび, $T = V \otimes W$ と書く.
- $f(v, w)$ をベクトル v, w のテンソル積とよび, $f(v, w) = v \otimes w$ と書く.

Lemma 1. 一般に $\{e_i\}_{i=1}^m$ を V の基底, $\{f_j\}_{j=1}^n$ を W の基底として,

$$A := \text{span} \{ f(e_i, f_j) \mid e_i (i = 1, \dots, m), f_j (j = 1, \dots, n) \} \quad (1)$$

$$B := \text{span} \{ f(v, w) \mid v \in V, w \in W \} \quad (2)$$

$$= \text{span} \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v^i w^j f(e_i, f_j) \mid v^i \in \mathbb{C} (i = 1, \dots, m), w^j \in \mathbb{C} (j = 1, \dots, n) \right\} \quad (3)$$

$$\subseteq \text{span} \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c^{i,j} f(e_i, f_j) \mid c^{i,j} \in \mathbb{C} (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n) \right\} = A \quad (4)$$

であるから $A = B$ である. 実際, span による定義式(1) (2)を比べると $A \subseteq B$ であり, 双線型性を用いた展開式(3)より (上記の通り) $B \subseteq A$.

Example 1 (クロネッカー積).

$$f : (v, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \longmapsto f(v, w) = v \otimes w \in \mathbb{C}^{mn}$$

(i) クロネッカー積は双線型写像である (定義を観察すると明らか)

(ii) $\{e_i\}_{i=1}^m, \{f_j\}_{j=1}^n$ を $\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n$ の標準基底とすると, (例で見たように) $e_i \otimes f_j$ は $\mathbb{C}^{mn}$ の標準基底.

よって, $\mathbb{C}^{mn} = \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$

6.3 テンソル積の構成

Lemma 2. テンソル積（およびテンソル空間）は必ず存在する

（証明） $\dim V = m, \dim W = n$ とする（有限次元を仮定，無限次元の場合でも証明は同様）。
 $\{e_i\}_{i=1}^m, \{f_j\}_{j=1}^n$ を V, W の基底として，形式的に $\{g_{i,j} \mid (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)\}$ を基底とする mn 次元ベクトル空間：

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c^{i,j} g_{i,j} \mid c^{i,j} \in \mathbb{C} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n) \right\}$$

を考え，基底の対応 $f(e_i, f_j) := g_{i,j}$ を双線型に拡張してやればよい。すなわち，

$$v = \sum_{i=1}^m v^i e_i \in V, w = \sum_{j=1}^n w^j f_j \in W \text{ について}$$

$$f(v, w) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v^i w^j g_{i,j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v^i w^j f(e_i, f_j) \in T$$

と定義すると (i) 双線型写像であり，定義より (ii) $f(e_i, f_j) = g_{i,j}$ が T の基底である。

Lemma 3. 上の構成方法と後に述べるテンソル積の一意性から，

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \times \dim W$$

6.4 テンソル積の普遍性（テンソル積は双線型写像の親玉）

Theorem 1 (テンソル積の普遍性).

が唯一存在して, $g = g' \circ f$

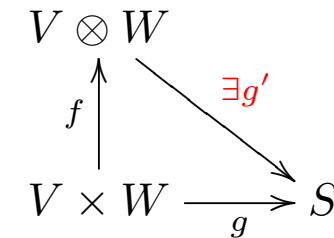
$$f : V \times W \longrightarrow T = V \otimes W$$

をテンソル積とする. ベクトル空間 V, W から
ベクトル空間 S への**双線型写像**

$$g : (v, w) \in V \times W \longmapsto g(v, w) \in S$$

が任意に与えられたとき, **線形写像**

$$g' : x \in V \otimes W \longmapsto g'(x) \in S$$



証明. $\{e_i\}_{i=1}^m, \{f_j\}_{j=1}^n$ を V, W の基底とすると, テンソル積空間 $V \otimes W$ の基底は $\{e_i \otimes f_j \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ であるから, 写像 g' が

$$g' : x = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c^{i,j} e_i \otimes f_j \in V \otimes W \longmapsto g'(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c^{i,j} g(e_i, f_j) \in S$$

で定義される.*¹ これは明らかに線形写像であり, 基底について,

$$(g' \circ f)(e_i, f_j) = g'(f(e_i, f_j)) = g'(e_i \otimes f_j) = g(e_i, f_j)$$

*¹ この場合, 基底を固定したときの x の展開方法が 1 通りなので well-defined です. 入力要素の表現方法が 1 通りでない場合, 1 つの入力の行き先が 2 つ定義されているかも知れないので要注意です.

双線型性を用いることで、 $(g' \circ f)(v, w) = g(v, w)$ ($\forall v \in V, \forall w \in W$) が導かれる。

(唯一であることの証明) 線形写像

$$g'_1 : x \in V \otimes W \longmapsto g'_1(x) \in S, \quad g'_2 : x \in V \otimes W \longmapsto g'_2(x) \in S$$

の2つがTheorem 1の性質を満たしているとする、 $g(v, w) = g'_1 \circ f(v, w) = g'_2 \circ f(v, w)$ が成立する。
 v, w として V, W の基底をとってくれば、

$$g'_1 \circ f(e_i, f_j) = g'_2 \circ f(e_i, f_j) \iff g'_1(e_i \otimes f_j) = g'_2(e_i \otimes f_j) \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$$

g'_1 と g'_2 で基底の行き先が等しいから $g'_1 = g'_2$ である。

□

6.5 テンソル積の一意性

Theorem 2 (テンソル積の一意性). **テンソル積** が存在して $f' \circ g' = \text{id}$, $g' \circ f' = \text{id}$.

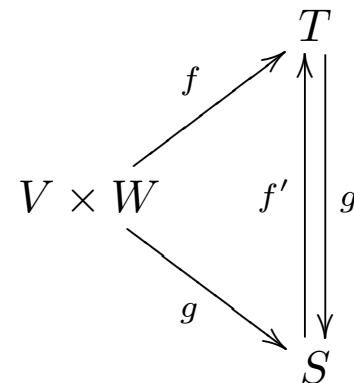
$$f : (v, w) \in V \times W \mapsto f(v, w) = v \otimes w \in T$$

は線形同型（逆写像を持つ線形写像でやり合う自由度）を除いて一意である。すなわち、

$$g : (v, w) \in V \times W \mapsto g(v, w) \in S$$

もテンソル積の条件を満たすならば、線形写像

$$g' : T \longrightarrow S, \quad f' : S \longrightarrow T$$



(証明) (f, T) の組がテンソル積であることから、普遍性(Theorem 1)より線形写像 $g' : T \longrightarrow S$ が存在して $g = g' \circ f$ が成り立つ。 (g, S) の組もテンソル積であることから、立場を入れ替えることで、線形写像 $f' : S \longrightarrow T$ が存在して $f = f' \circ g$ が成り立つ。これらより、

$$f = f' \circ g = f' \circ g' \circ f$$

この両辺の引数に基底を入れると、

$$\text{id}(e_i \otimes f_j) = e_i \otimes f_j = f(e_i, f_j) = (f' \circ g' \circ f)(e_i, f_j) = (f' \circ g')(e_i \otimes f_j)$$

となって $\text{id} = f' \circ g'$ 。立場を入れ替えることで、 $\text{id} = g' \circ f'$ 。

6.6 Hilbert 空間のテンソル積

$\mathcal{H}, \mathcal{K}$ を Hilbert 空間, $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^m, \{|f_j\rangle\}_{j=1}^n$ を $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ の正規直交基底とすると, ベクトル空間としてのテンソル積空間 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ は

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} = \left\{ x = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c^{i,j} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \mid c^{i,j} \in \mathbb{C} (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n) \right\} \quad (5)$$

Definition 4. $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ を Hilbert 空間とするとき, ベクトル空間としてのテンソル積空間 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ において,

$$\langle a \otimes c, b \otimes d \rangle := \langle a, b \rangle \langle c, d \rangle \quad (|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}, |c\rangle, |d\rangle \in \mathcal{K})$$

を拡張することで内積を定めた Hilbert 空間を, **テンソル積 Hilbert 空間** という.

(注意) $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ の要素は, テンソル積の形 $|x\rangle \otimes |y\rangle$ だけではなく, **テンソル積の線形結合 (5) の形** をしている. 内積の定義において **「拡張する」** という意味は, 一般のベクトル

$$x = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c^{i,j} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}, \quad y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d^{i,j} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$$

に対して, 内積の条件 (左で反線形, 右で線形) を満足するように, 次式で定義することである.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \overline{c^{i,j}} d_{k,l} \langle e_i \otimes f_j, e_k \otimes f_l \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \overline{c^{i,j}} d_{k,l} \langle e_i, e_k \rangle \langle f_j, f_l \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \overline{c^{i,j}} d_{i,j}$$

6.7 作用素のテンソル積

Definition 5. 線形作用素 $A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_1$, $B : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ に対して,

$$(A \otimes B)(|x\rangle \otimes |y\rangle) := (A|x\rangle) \otimes (B|y\rangle) \quad (|x\rangle \in \mathcal{H}_1, |y\rangle \in \mathcal{H}_2) \quad (6)$$

を線形に拡張することで線形作用素

$$A \otimes B : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$$

を定義する.

(注意) $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^m, \{|f_j\rangle\}_{j=1}^n$ を $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ の正規直交基底とすると, $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の基底は $|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle$ である.
(6) により基底の行き先が次式で定まるので, あとは $A \otimes B$ の線形性を要請しておけば線形作用素を定めたことになる.

$$(A \otimes B)(|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle) := (A|e_i\rangle) \otimes (B|f_j\rangle) \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n) \quad (7)$$

6.8 行列のクロネッカ積

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,r} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{q,1} & b_{q,2} & \cdots & b_{q,r} \end{pmatrix}$$

に対して、**クロネッカー積はテンソル積**を与える。

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \cdots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \cdots & a_{2,n}B \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & a_{m,2}B & \cdots & a_{m,n}B \end{pmatrix}$$

実際、線形作用素であることは明らかで、次の通りテンソル積の定義式(6)を満たす。

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(|x\rangle \otimes |y\rangle) &= \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \cdots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \cdots & a_{2,n}B \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & a_{m,2}B & \cdots & a_{m,n}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 |y\rangle \\ x_2 |y\rangle \\ \vdots \\ x_n |y\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j) \cdot B |y\rangle \\ (\sum_{j=1}^n a_{2,j} x_j) \cdot B |y\rangle \\ \vdots \\ (\sum_{j=1}^n a_{m,j} x_j) \cdot B |y\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A|x\rangle)_1 \cdot B |y\rangle \\ (A|x\rangle)_2 \cdot B |y\rangle \\ \vdots \\ (A|x\rangle)_m \cdot B |y\rangle \end{pmatrix} = (A|x\rangle) \otimes (B|y\rangle) \end{aligned}$$

6.9 作用素のテンソル積の性質

- (i) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$
- (ii) $(A \otimes B)^* = (A^* \otimes B^*)$
- (iii) $\text{Tr}(A \otimes B) = (\text{Tr } A)(\text{Tr } B)$
- (iv) $a \in \mathbb{C}$, $|a\rangle$ が A の固有値・固有ベクトル, $b \in \mathbb{C}$, $|b\rangle$ が B の固有値・固有ベクトル
 $\implies ab$, $|a\rangle \otimes |b\rangle$ は $A \otimes B$ の固有値・固有ベクトル
- (v) $A \geq 0$, $B \geq 0 \implies A \otimes B \geq 0$

(証明) (i) 次式と線形拡張の議論より OK.

$$(A \otimes B)(C \otimes D)(|x\rangle \otimes |y\rangle) = (A \otimes B)(C|x\rangle \otimes D|y\rangle) = AC|x\rangle \otimes BD|y\rangle = (AC \otimes BD)(|x\rangle \otimes |y\rangle)$$

(ii) 次式と拡張の議論より OK.

$$\begin{aligned}\langle (A \otimes B)(x \otimes y), (z \otimes w) \rangle &= \langle (x \otimes y), (A \otimes B)^*(z \otimes w) \rangle \\ \langle (A \otimes B)(x \otimes y), (z \otimes w) \rangle &= \langle (Ax \otimes By), (z \otimes w) \rangle = \langle Ax, z \rangle \langle By, w \rangle = \langle x, A^*z \rangle \langle y, B^*w \rangle \\ &= \langle (x \otimes y), (A^*z \otimes B^*w) \rangle = \langle (x \otimes y), (A^* \otimes B^*)(z \otimes w) \rangle\end{aligned}$$

$$\text{(iii)} \quad \text{Tr}(A \otimes B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle e_i \otimes f_j | (A \otimes B) | e_i \otimes f_j \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle e_i | A | e_i \rangle \langle f_j | B | f_j \rangle = (\text{Tr } A)(\text{Tr } B)$$

$$\text{(iv)} \quad (A \otimes B)(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (A|a\rangle \otimes B|b\rangle) = (a|a\rangle \otimes b|b\rangle) = ab|a\rangle \otimes |b\rangle$$

$$\text{(v)} \quad A \geq 0, B \geq 0 \text{ より, } A = C^*C, B = D^*D \text{ とかけ, } A \otimes B = (C \otimes D)^*(C \otimes D) \geq 0$$

6.10 $\mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ の基底

- （復習） Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の基底を $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^m$ とするとき, $\mathcal{H}$ 上の作用素 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ の展開表現

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \langle e_i | A | e_j \rangle |e_i\rangle \langle e_j|$$

- より, $\{|e_i\rangle \langle e_j| \mid i, j = 1, \dots, m\}$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の基底である (第3回, 2.4)
- さらに, Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ の基底を $\{|f_k\rangle\}_{k=1}^n$ とすると, $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ の基底は $\{|e_i\rangle \otimes |f_k\rangle \mid i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n\}$ であり,

$$\langle e_j \otimes f_l | = \langle e_j | \otimes \langle f_l |$$

(線形汎関数として両者が等しいことが容易に分かる) に注意すると,

$$|e_i \otimes f_k\rangle \langle e_j \otimes f_l| = |e_i\rangle \langle e_j| \otimes |f_k\rangle \langle f_l| \quad (i, j = 1, \dots, m, k, l = 1, \dots, n)$$

が $\mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ の基底になる. すなわち,

任意の $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ は

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a^{i,j,k,l} |e_i\rangle \langle e_j| \otimes |f_k\rangle \langle f_l| \quad (8)$$

の形に一意的に表される.

6.11 合成系

合成系の記述

- (i) Hilbert 空間 $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ で表される系の合成系は $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ で記述される. すなわち,
 - 合成系上の状態は密度作用素 $\rho_{AB} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ で一意的に表現される
 - 合成系上の測定は $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 上の POVM で表される
- (ii) $\mathcal{H}_A$ 上の状態を $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A)$, $\mathcal{H}_B$ 上の状態を $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$ が独立に準備されているとき, 合成系の状態はテンソル積 $\rho \otimes \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ で記述される.
- (iii) $\mathcal{H}_A$ 上の測定 (POVM) $M = \{M_x\}_{x \in \mathcal{X}}$ と, $\mathcal{H}_B$ 上の測定 (POVM) $N = \{N_y\}_{y \in \mathcal{Y}}$ を独立に行うとき, 合成系の測定 (POVM) としては $\{M_x \otimes N_y\}_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$ になる.

Example 2 (独立な状態準備と, 独立な測定の場合).

$$P(x, y) = \text{Tr}(\rho \otimes \sigma)(M_x \otimes N_y) = \text{Tr} \rho M_x \cdot \text{Tr} \sigma N_y = P_M^\rho(x) \cdot P_N^\sigma(y)$$

測定値 (x, y) の従う分布は独立になる.

Example 3 (一方の系を測定しない場合). 何も測定しない状況を「常に測定値の目盛りが同じ値を指し続ける測定」と考えれば POVM $\{I\}$ と見なせる. 上記 (iii) において, 系 $\mathcal{H}_A$ のみに測定を行い, 系 $\mathcal{H}_B$ に何も測定をしない状況では, 合成系の POVM は $\{M_x \otimes I\}_{x \in \mathcal{X}}$ で表される. 合成系の状態が ρ_{AB} であるとき,

$$P(x) = \text{Tr}[\rho_{AB}(M_x \otimes I)] \tag{9}$$

$\rho_{AB} = \rho \otimes \sigma$ であるとき,

$$P(x) = \text{Tr}[(\rho \otimes \sigma)(M_x \otimes I)] = \text{Tr} \rho M_x \cdot \text{Tr} \sigma = \text{Tr} \rho M_x$$