

2021年6月9日

量子情報数理特論

(第9回) シュミット分解, エンタングルメント, 量子テレポーテーション

電気通信大学 大学院情報理工学研究科

小川朋宏

8 シュミット分解, エンタングルメント, 量子テレポーテーション

(課題)

- (1) ケットベクトルの転置について説明せよ
- (2) シュミット分解について説明せよ
- (3) 純粋状態エンタングルメントはどの様に判定できるか？
- (4) 最大エンタングルメント状態とは何か？
- (5) ベル基底とは何か？
- (6) bit flip, phase flip について説明せよ

8.1 転置 (transpose)

Definition 1. Hilbert空間 \mathcal{K} の正規直交基底 $\{|f_i\rangle\}_{i=1}^n$ を固定するとき,

$$T : |x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i |f_i\rangle \longmapsto \langle x^T| := \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\langle f_i|}_{\text{フリップ}}$$

を転置 (transpose) という。また、 \mathcal{K} 上の作用素 $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle f_i| A |f_j\rangle \underbrace{|f_i\rangle\langle f_j|}_{\text{ここを}}$ に対して、転置を次式で定義する。

$$A^T := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle f_i| A |f_j\rangle \underbrace{|f_j\rangle\langle f_i|}_{\text{フリップ}} \quad (1)$$

(注意) 転置は線形同型写像である。ケットベクトルとブラベクトルの対応 (複素共役転置)

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i |f_i\rangle \longleftrightarrow \langle x| = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \langle f_i| \quad (2)$$

は基底に依存しないが、転置は固定した基底に依存する。

Lemma 1 (転置の性質).

(i) 転置について、ケットとブラの対応(2)は次式で与えられる.

$$\langle x^T | = \sum_{i=1}^n x_i \langle f_i | \longleftrightarrow |x^T\rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i |f_i\rangle$$

(ii) 内積について,

$$\langle x^T | y^T \rangle = \left(\sum_{i=1}^n x_i \langle f_i | \right) \left(\sum_{j=1}^n \bar{y}_j |f_j\rangle \right) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = \langle y | x \rangle$$

特に正規直交基底 $\{|\alpha_k\rangle\}_{k=1}^n$ について, $\{|\alpha_k^T\rangle\}_{k=1}^n$ も正規直交基底である.

(iii) 任意の $|x\rangle \in \mathcal{K}$ と $A \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ について, $(A|x\rangle)^T = \langle x^T | A^T$

$$\begin{array}{ccc} |x\rangle & \xrightarrow{T} & \langle x^T | \\ A \downarrow & & \downarrow A^T \\ A|x\rangle & \xrightarrow{T} & \langle x^T | A^T \end{array}$$

(iii) の証明 : (1) より,

$$A|f_k\rangle = \sum_{i=1}^n \langle f_i | A|f_k\rangle |f_i\rangle, \quad \langle f_k | A^T = \sum_{i=1}^n \langle f_i | A|f_k\rangle \langle f_i |$$

基底について $T(A|f_k\rangle) = \langle f_k | A^T$ ($k = 1, 2, \dots, n$) であるから, 線形性により (iii) が成立.

8.2 同型対応 : $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \leftrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$

Hilbert 空間 \mathcal{K} から \mathcal{H} への線形作用素全体の集合を $\mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ とかく。

Lemma 2. Hilbert 空間 \mathcal{H}, \mathcal{K} のそれぞれについて, 基底 $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^m, \{|f_j\rangle\}_{j=1}^n$ が固定されているとき,

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \longleftrightarrow X(x) := (I \otimes T) |x\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} |e_i\rangle \langle f_j| \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$$

はベクトル空間の同型対応を与える (両者を同一視できる)。

Lemma 3.

(i) 任意の $|x\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ について, $(A \otimes B) |x\rangle \longleftrightarrow AX(x)B^T$

特に $\mathcal{H} \simeq \mathcal{K}$ ($m = n$) のとき, $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} |e_i\rangle \langle e_j|$ に対して $\tilde{A} := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} |f_i\rangle \langle f_j|$ とおけば:

(ii) $|\Phi\rangle := \sum_{k=1}^m |e_k\rangle \otimes |f_k\rangle \longleftrightarrow I = \sum_{k=1}^m |e_k\rangle \langle f_k| \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ (基底 $|f_k\rangle$ を $|e_k\rangle$ に移す同一視)

(iii) $(A \otimes I) |\Phi\rangle = (I \otimes \tilde{A}^T) |\Phi\rangle$ [$\because (A \otimes I) |\Phi\rangle \longleftrightarrow A \cdot I = I \cdot \tilde{A}^T \longleftrightarrow (I \otimes \tilde{A}^T) |\Phi\rangle$]

(iv) 任意の $|x\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ について, 次式を満たす $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が一意に存在

$$|x\rangle = (X \otimes I) |\Phi\rangle \quad [\because |x\rangle \longleftrightarrow X(x) = X(x)I \longleftrightarrow (X(x) \otimes I) |\Phi\rangle]$$

8.3 シュミット分解

Theorem 1. 任意のベクトル $|x\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ について,

($|x\rangle$ に依存して) 正規直交基底 $\{|\alpha_k\rangle\}_{k=1}^m, \{|\beta_k\rangle\}_{k=1}^n$ を上手く選ぶことにより以下の形に書ける.

$$|x\rangle = \sum_{k=1}^r \lambda_k |\alpha_k\rangle \otimes |\beta_k\rangle \quad (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0, r \leq \min\{m, n\})$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r > 0$, r は $|x\rangle$ に対して一意に定まり, シュミット係数, シュミットランクとよぶ.

(証明) Lemma 2 の同型対応 $X := (I \otimes T) |x\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} |e_i\rangle \langle f_j|$ を考える.

特異値分解定理 (2) よりユニタリ作用素 U, V が存在して,

$$X = U \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k |e_k\rangle \langle f_k| \right) V = \sum_{k=1}^r \lambda_k \underbrace{U |e_k\rangle}_{|\alpha_k\rangle} \underbrace{\langle f_k| V}_{\langle \gamma_k|} \quad (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0)$$

ユニタリ作用素の性質と基底の延長により, 正規直交基底 $\{|\alpha_k\rangle\}_{k=1}^m, \{|\gamma_k\rangle\}_{k=1}^n$ が取れて,

$$|x\rangle = (I \otimes T^{-1}) X = \sum_{k=1}^r \lambda_k |\alpha_k\rangle \otimes T^{-1}(\langle \gamma_k|) = \sum_{k=1}^r \lambda_k |\alpha_k\rangle \otimes |\beta_k\rangle \quad (T |\beta_k\rangle = \langle \gamma_k|)$$

転置と内積の関係 (Lemma 1 (ii)) から, $\{|\beta_k\rangle\}_{k=1}^n$ も正規直交基底である.

8.4 エンタングルメント

エンタングルメント (entanglement) は古典系では現れない量子力学的相関のこと。量子もつれともよぶ。

Definition 2. 一般に密度作用素 $\rho_{AB} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ が,

$$\rho_{AB} = \sum_k p_k \sigma_k^A \otimes \sigma_k^B \quad (3)$$

$$\sigma_k^A \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A), \quad \sigma_k^B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_B), \quad p_k \geq 0, \quad \sum_k p_k = 1$$

の形に書けるとき (i.e. テンソル積状態の凸結合の形に書けるとき) **separable 状態**であるという。
 ρ_{AB} が上の形に書けないとき (separable 状態でないとき), **エンタングル状態 (entangled state)** であるという。

混合状態に関するエンタングルメントの扱いは難しい。以降では**純粋状態に限定して議論する**。

8.5 純粋状態エンタングルメント

純粋状態の密度作用素は、状態ベクトル $|\Psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ により

$$\rho_{AB} = |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}| \quad (|\Psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$$

とかける。シュミット分解を考える。

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{k=1}^r \lambda_k |e_k\rangle \otimes |f_k\rangle \quad (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0, r \leq \min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\})$$

状態ベクトルはノルム1であるからシュミット係数の2乗は確率ベクトル。 $\lambda_k = \sqrt{p_k}$ とおけば、

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{k=1}^r \sqrt{p_k} |e_k\rangle \otimes |f_k\rangle, \quad (p_1, p_2, \dots, p_r) \text{ は確率ベクトル}$$

純粋状態エンタングルメントの分類

- (i) $r = 1$ のとき : $p_1 = 1$ で、エンタングルしていない。 $|\Psi_{AB}\rangle = |e_1\rangle \otimes |f_1\rangle$
- (ii) $r \geq 2$ のとき : シュミットランクの一意性から(3)の形に書けず、エンタングル状態である。
- (iii) $r = d := \dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B$ で、**確率ベクトル (p_1, p_2, \dots, p_d) が一様分布であるとき、最大エンタングル状態 (maximally entangled state) であるという。**

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^d |e_k\rangle \otimes |f_k\rangle =: |\Phi_{AB}\rangle \quad (d = \dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B)$$

8.6 最大エンタングル状態

$$|\Phi_{AB}\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^d |e_k\rangle \otimes |f_k\rangle \quad (d = \dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B)$$

Lemma 3 より, $A = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{i,j} |e_i\rangle\langle e_j|$ に対して $\tilde{A} := \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{i,j} |f_i\rangle\langle f_j|$ とおけば,

Lemma 4 (最大エンタングル状態の性質).

$$(i) \quad |\Phi_{AB}\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^d |e_k\rangle \otimes |f_k\rangle \xleftrightarrow{\text{同型対応}} \frac{1}{\sqrt{d}} I_{A \rightarrow B} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^d |e_k\rangle\langle f_k|$$

$$(ii) \quad (A \otimes I) |\Phi_{AB}\rangle = (I \otimes \tilde{A}^T) |\Phi_{AB}\rangle$$

(iii) 任意の $|x\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ について, 次式を満たす $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ が一意に存在

$$|x\rangle = (X \otimes I) |\Phi_{AB}\rangle$$

(iii) は Lemma 3 (iv) による.

8.7 最大エンタングル状態の表現

Lemma 5. \mathcal{H}_A の任意の正規直交基底 $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^d$ に対して, \mathcal{H}_B の正規直交基底 $\{|f'_k\rangle\}_{k=1}^d$ が存在して,

$$|\Phi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^d |e_k\rangle \otimes |f_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^d |e'_k\rangle \otimes |f'_k\rangle$$

(証明) \mathcal{H}_A の正規直交基底 $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^d, \{|e'_k\rangle\}_{k=1}^d$ に対して, $|e'_k\rangle = U|e_k\rangle$ ($k = 1, 2, \dots, d$) となるユニタリ作用素が存在する (第8回, 7.7). これにより,

$$\begin{aligned} |\Phi_{AB}\rangle &= (UU^* \otimes I) |\Phi_{AB}\rangle = (U \otimes I)(U^* \otimes I) |\Phi_{AB}\rangle \\ &= (U \otimes I)(I \otimes \tilde{U}^{*T}) |\Phi_{AB}\rangle = (U \otimes \tilde{U}^{*T}) |\Phi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^d |e'_k\rangle \otimes |f'_k\rangle \end{aligned}$$

ただし, $|f'_k\rangle = \tilde{U}^{*T} |f_k\rangle$ とおいた. ユニタリ作用素 U に対して, $U^*, \tilde{U}^*, \tilde{U}^{*T}$ がユニタリ作用素であることは容易に確認でき, したがって, $|f'_k\rangle$ は正規直交基底となる.

8.8 例： $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2$ の場合

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |f_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |f_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|e'_1\rangle = \frac{|e_1\rangle + |e_2\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |e'_2\rangle = \frac{|e_1\rangle - |e_2\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$|f'_1\rangle = \frac{|f_1\rangle + |f_2\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |f'_2\rangle = \frac{|f_1\rangle - |f_2\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおくと、以下が成立.

$$|\Phi_{AB}\rangle = \frac{|e_1\rangle \otimes |f_1\rangle + |e_2\rangle \otimes |f_2\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|e'_1\rangle \otimes |f'_1\rangle + |e'_2\rangle \otimes |f'_2\rangle}{\sqrt{2}}$$

実際,

$$\begin{aligned} \frac{|e'_1\rangle \otimes |f'_1\rangle + |e'_2\rangle \otimes |f'_2\rangle}{\sqrt{2}} &= \frac{(|e_1\rangle + |e_2\rangle) \otimes (|f_1\rangle + |f_2\rangle) + (|e_1\rangle - |e_2\rangle) \otimes (|f_1\rangle - |f_2\rangle)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{|e_1\rangle \otimes |f_1\rangle + |e_2\rangle \otimes |f_2\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

8.9 純粋状態における測定と確率

- 純粋状態 $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ に対して, POVM測定 $M = \{M_x\}_{x \in \mathcal{X}}$ を行ったとき, 測定値 $x \in \mathcal{X}$ の確率は

$$P_\psi(x) = \text{Tr } \rho_\psi M_x = \text{Tr } |\psi\rangle\langle\psi| M_x = \langle\psi|M_x|\psi\rangle$$

- 射影測定 (PVM) $E = \{E_x\}_{x \in \mathcal{X}}$ の場合, 確率が

$$P_\psi(x) = \langle\psi|E_x|\psi\rangle = \langle\psi|E_x E_x|\psi\rangle = \langle E_x \psi | E_x \psi \rangle = \|E_x |\psi\rangle\|^2$$

で与えられ, 射影成分の二乗になる.

- $|\psi\rangle$ が正規直交基底 $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^m$ で展開されている場合 :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i |e_i\rangle \quad (\alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, m) \quad (4)$$

射影測定として $E_i = |e_i\rangle\langle e_i|$ ($i = 1, 2, \dots, m$) を取れば,

$$P_\psi(i) = \|E_i |\psi\rangle\|^2 = |\alpha_i|^2$$

- (4) において, 係数 α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) を複素振幅と呼ぶことがある.

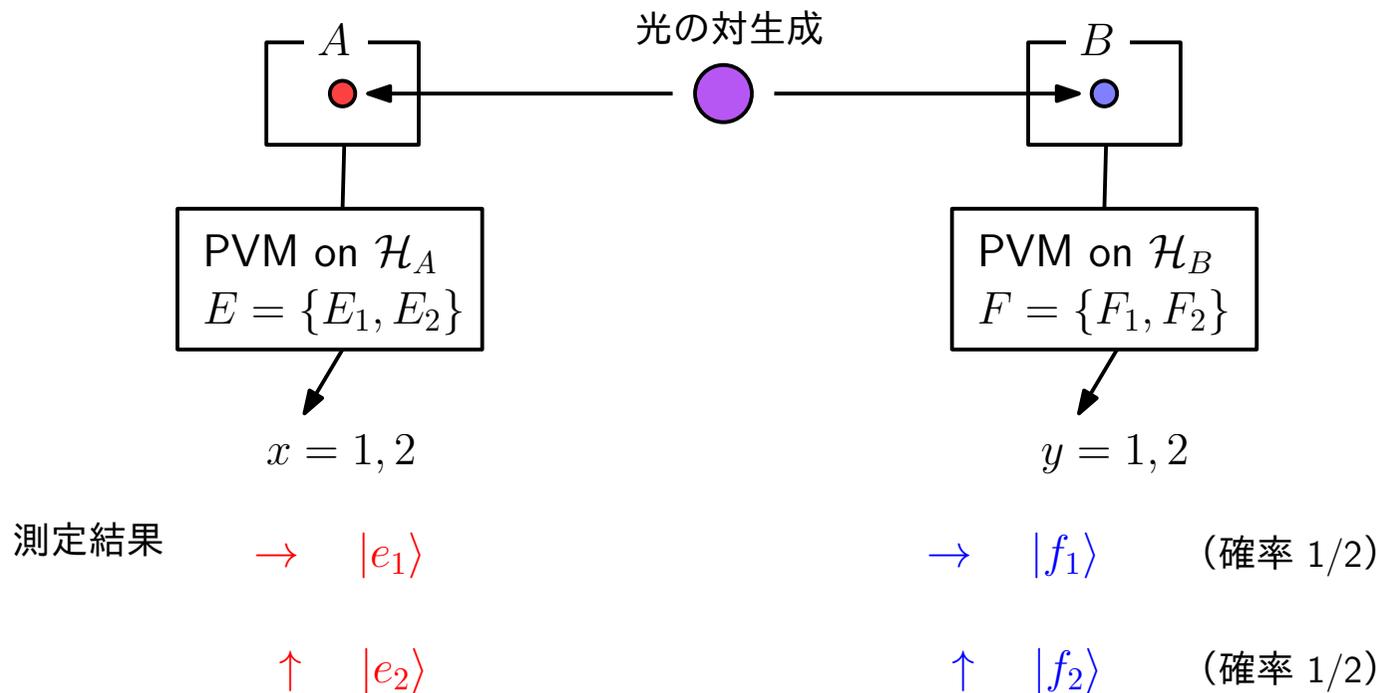
射影仮説

測定値 $x \in \mathcal{X}$ が得られた場合, 状態が $|\psi_x\rangle := \frac{E_x |\psi\rangle}{\|E_x |\psi\rangle\|}$ に変化する.

(同じ射影測定を行うと, 確率1で同一の測定値 $x \in \mathcal{X}$ が得られることになる)

8.10 最大エンタングル状態と測定値の相関 (i)

$$|\Phi_{AB}\rangle = \frac{|e_1\rangle \otimes |f_1\rangle + |e_2\rangle \otimes |f_2\rangle}{\sqrt{2}}$$

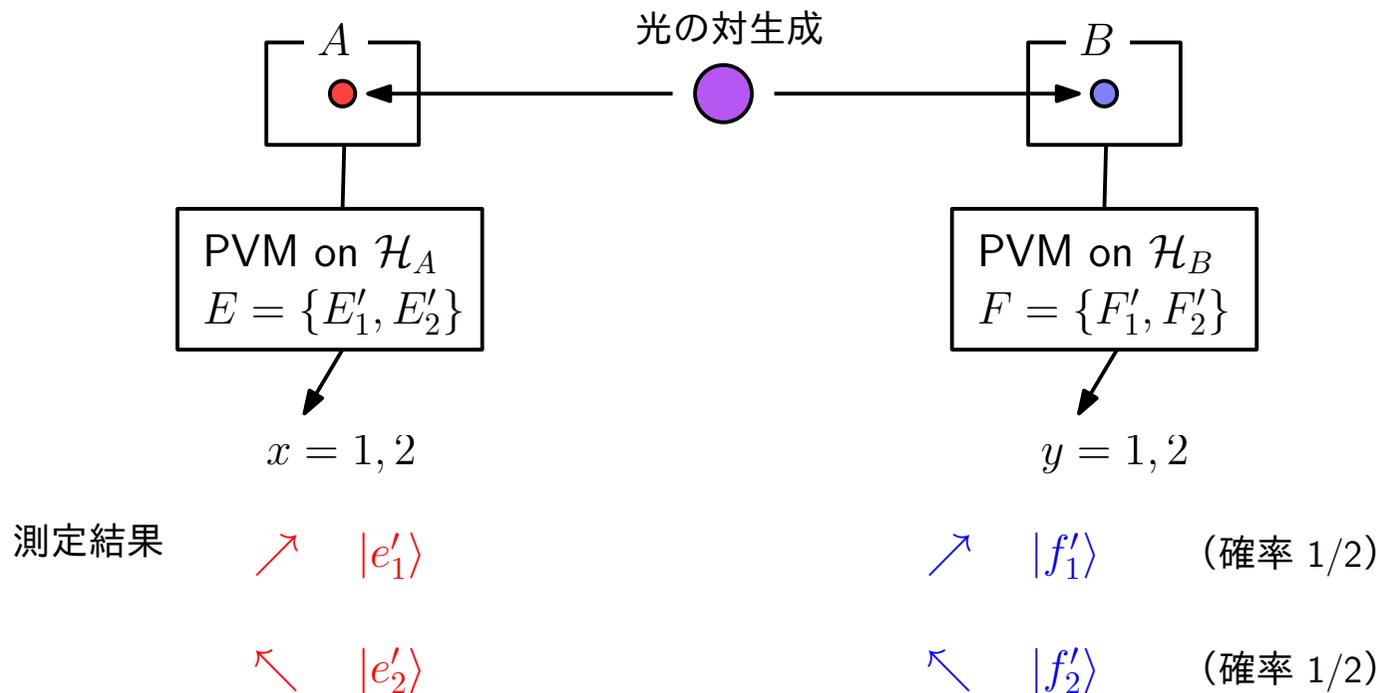


(i) 系AでPVM $E_1 = |e_1\rangle\langle e_1|$, $E_2 = |e_2\rangle\langle e_2|$, 系BでPVM $F_1 = |f_1\rangle\langle f_1|$, $F_2 = |f_2\rangle\langle f_2|$ を行うと,

$$P_{\Phi_{AB}}(x, y) = \|(E_x \otimes F_y) |\Phi_{AB}\rangle\|^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

8.11 最大エンタングル状態と測定値の相関 (ii)

$$|\Phi_{AB}\rangle = \frac{|e_1\rangle \otimes |f_1\rangle + |e_2\rangle \otimes |f_2\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|e'_1\rangle \otimes |f'_1\rangle + |e'_2\rangle \otimes |f'_2\rangle}{\sqrt{2}}$$



(ii) 系AでPVM $E'_1 = |e'_1\rangle\langle e'_1|$, $E'_2 = |e'_2\rangle\langle e'_2|$, 系BでPVM $F'_1 = |f'_1\rangle\langle f'_1|$, $F'_2 = |f'_2\rangle\langle f'_2|$ を行うと,

$$P_{\Phi_{AB}}(x, y) = \|(E'_x \otimes F'_y) |\Phi_{AB}\rangle\|^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

(i) (ii) のいずれのケースでも $x = y = 1$ または $x = y = 2$ が確率 1/2 で生起する (完全相関).

8.12 ベル基底

$$|0\rangle := |e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle := |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおき，合成系におけるテンソル積記号 \otimes を省略して書く．

- $|01\rangle, |10\rangle$ を45度回転することで， $|\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle$ が得られる．

$$|01\rangle \longleftrightarrow |\Psi^+\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{45度回転}$$

$$|10\rangle \longleftrightarrow |\Psi^-\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{45度回転}$$

- $|00\rangle, |11\rangle$ を45度回転することで， $|\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle$ が得られる．

$$|00\rangle \longleftrightarrow |\Phi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{45度回転}$$

$$|11\rangle \longleftrightarrow |\Phi^-\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{45度回転}$$

- $|\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle, |\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle$ はベル基底とよばれる $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ の正規直交基底*1
- これらはすべて最大エンタングル状態である．

*1 特に， $|\Psi^-\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$ は singlet と呼ばれ， $SU(2)$ の一次元既約表現（符号表現）を与える．

8.13 bit flip と phase flip

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- bit flip $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$X|0\rangle = X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle, \quad X|1\rangle = X \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

- phase flip $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$Z|0\rangle = Z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle = (-1)^0 |0\rangle, \quad Z|1\rangle = Z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|1\rangle = (-1)^1 |1\rangle,$$

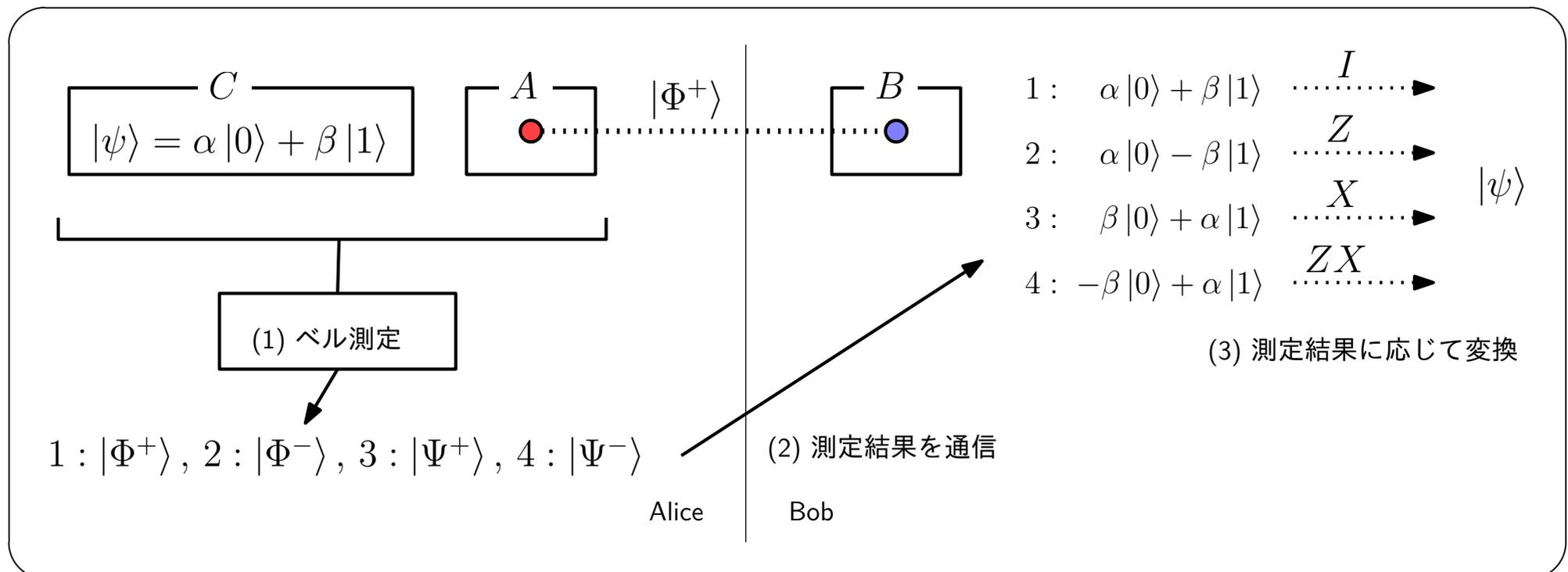
8.14 量子テレポーテーション

- Aliceが所有する系 C における, 未知のベクトル状態を, 遠隔にいる Bob に送信したい.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \in \mathbb{C}^2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1)$$

- 測定を行うと破壊されてしまう.
- Aliceの系 A と, Bobの系 B の合成系で, 最大エンタングル状態を共有していると仮定.

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$



系 C, A, B の合成系における状態は、計算により以下で表される。

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{2} |\Phi^+\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + \frac{1}{2} |\Phi^-\rangle \otimes (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) \\
 &\quad + \frac{1}{2} |\Psi^+\rangle \otimes (\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + \frac{1}{2} |\Psi^-\rangle \otimes (-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)
 \end{aligned}$$

実際,

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{2} \times (\text{右辺}) &= (|00\rangle + |11\rangle) \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + (|00\rangle - |11\rangle) \otimes (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) \\
 &\quad + (|01\rangle + |10\rangle) \otimes (\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + (|01\rangle - |10\rangle) \otimes (-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) \\
 &= (\alpha + \alpha)|000\rangle + (\beta - \beta)|001\rangle + (\alpha - \alpha)|110\rangle + (\beta + \beta)|111\rangle \\
 &\quad + (\beta - \beta)|010\rangle + (\alpha + \alpha)|011\rangle + (\beta + \beta)|100\rangle + (\alpha - \alpha)|101\rangle \\
 &= 2(\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle) \\
 &= 2(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle) = 2\sqrt{2} \times (\text{左辺})
 \end{aligned}$$

量子テレポーテーションの Protokol

- (1) Alice が所有する系 $C +$ 系 A の合成系でベル基底 $|\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle, |\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle$ により測定
- (2) 4通りの測定結果 1, 2, 3, 4 を, 古典回線 (電話, インターネット) により, Alice から Bob に送信する (2 bit)
- (3) Bob は測定結果に応じて bit flip, phase flip の操作を行い未知のベクトル状態を復元する.
 測定結果 1 : 何もしない (I), 測定結果 2 : phase flip (Z),
 測定結果 3 : bit flip (X), 測定結果 4 : bit flip + phase flip (ZX)