2021年6月16日

量子情報数理特論
（第10回）量子通信路

電気通信大学 大学院情報理工学研究科

小川朋宏

9　量子通信路

(課題)

(1) 量子通信路の満たすべき条件として，正値性では不十分で，完全正値性が要請される．なぜか？
(2) CPTP 写像の三条件と，それらを要請するモチベーションを述べよ
(3) Kraus 表現のメリットを述べよ
(4) Stinespring 表現のメリットを述べよ
(5) Choi 行列の定義を述べよ
(6) Choi 行列を用いるメリットを述べよ

9.1 古典通信路 (classical chennel) と Markov Map

- 古典通信路 (classical chennel) とは次式を満たす関数 $W(y|x)$ である．

$$W(y|x) \geq 0 \ (x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}), \quad \sum_{y \in \mathcal{X}} W(y|x) = 1 \ (x \in \mathcal{X})$$

- 意味：各 x を固定するごとに y の確率分布（入力 x に依存して，出力 y が確率 $W(y|x)$ で得られる）
- 通常，同時分布 $P(x,y)$ から条件付き確率 $P(y|x) = \dfrac{P(x,y)}{P(x)}$ が定まるが，
  伝送路（ノイズ）のモデルとして条件付き確率 $W(y|x)$ を先に定めたもの．
- 入力 x が確率 $P(x)$ に従って発生する時，(x,y) の同時分布は $P(x,y) = P(x)W(y|x)$ である．
  よって，出力 y の確率 $P(y)$ は以下で与えられる．

$$x \sim P(x) \longrightarrow \boxed{W(y|x)} \longrightarrow y \sim P(y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(x)W(y|x)$$

- これより，入力分布から出力分布への写像 $\mathcal{E}_W$ が定まる．

$$\mathcal{E}_W : P \in (\mathcal{X}\text{上の確率分布全体}) \longmapsto PW \in (\mathcal{Y}\text{上の確率分布全体}) \quad \left(PW(y) := \sum_{x \in \mathcal{X}} P(x)W(y|x) \right)$$

  Markov Map と呼ばれる．

9.2 統計的混合 (stochastic mixture) と Markov Map

- 確率分布 $P(x)$, $Q(x)$ の凸結合（統計的混合, stochastic mixture）：

$$P_\theta(x) := \theta P(x) + (1-\theta)Q(x) \quad (0 \le \theta \le 1)$$

- 意味：確率 $(\theta, 1-\theta)$ でどちらかの分布が選ばれたときの x の従う確率.
すなわち，ラベル $\alpha = 0, 1$ が確率 $(\theta, 1-\theta)$ で与えられ，$\alpha = 0$ のとき x が $P(x|0) = P(x)$ から発生，$\alpha = 1$ のとき $P(x|1) = Q(x)$ から発生する場合の x の確率分布である．実際，同時分布は

$$P(\alpha, x) = P(\alpha)P(x|\alpha)$$

であり，周辺分布は

$$\sum_{\alpha=0,1} P(\alpha, x) = \sum_{\alpha=0,1} P(\alpha)P(x|\alpha) = P(0)P(x|0) + P(1)P(x|1) = \theta P(x) + (1-\theta)Q(x)$$

通信路の満たすべき性質（Markov Map）

(i) アファイン性（確率の凸結合を保存する）：

$$\mathcal{E}_W\big(\theta P + (1-\theta)Q\big) = \theta\, \mathcal{E}_W(P) + (1-\theta)\, \mathcal{E}_W(Q) \quad (0 \le \theta \le 1)$$

入力側で確率 $(\theta, 1-\theta)$ で P, Q どちらかが選ばれた時,
出力側では確率 $(\theta, 1-\theta)$ で $\mathcal{E}_W(P)$, $\mathcal{E}_W(Q)$ のどちらかが選ばれることになる.

(ii) 正値性（関数の正値性を保存する）（マイナスの確率はマズイ）

(iii) 確率保存（関数の和を保存する）

9.3 量子通信路に関する理論のアウトライン

- 量子通信路 (quantum chennel) は古典通信路の対応物であり，４つの同等な記述方法がある．

(a) CPTP写像：入力系とエンタングルしているかも知れない外界系も含めて，
密度作用素が密度作用素に写像されるための最低限の要請（量子通信路の公理的記述）
(b) Kraus表現：数学的に計算しやすい表式，完全正値性が一発で確認できる
(c) Stinespring表現：シュレーディンガー方程式に従う物理的な状態変化（ユニタリ発展）に対応
(d) Choi行列：量子通信路と1対1に対応する半正定値行列，
量子通信路を指定する標準的なパラメータ，シミュレーションなどでも有用

量子操作 (quantum operation) とも呼ばれる．

- 同等性の証明手順：

$$
\begin{tikzcd}
\text{(a) CPTP写像} \arrow[r] & \text{(d) Choi行列} \arrow[d] & \\
& \text{(b) Kraus表現} \arrow[ul] \arrow[r, shift left] & \text{(c) Stinespring表現} \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}
$$

9.4 CPTP写像

Definition 1. 写像 $\mathcal{E} : X_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \longmapsto \mathcal{E}(X_A) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ が以下の条件を満たすとき，CPTP写像(Completely Positive and Trace Preserving map) とよぶ．

(i) 線形性：$\forall a, \forall b \in \mathbb{C}$, $\forall X_A, \forall Y_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ に対して

$$\mathcal{E}(aX_A + bY_A) = a\mathcal{E}(X_A) + b\mathcal{E}(Y_A) \tag{1}$$

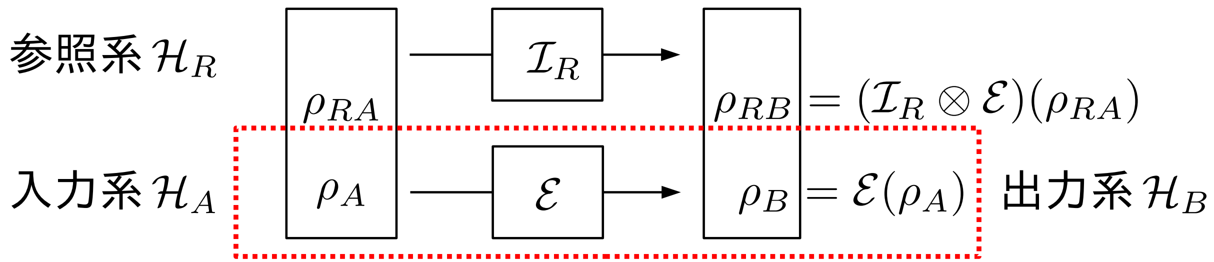
(ii) 完全正値性 (Complete Positivity)：任意の系 $\mathcal{H}_R$ と $\forall X_{RA} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_A)$ について

$$X_{RA} \geq 0 \implies (\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E})(X_{RA}) \geq 0 \tag{2}$$

(iii) トレース保存 (Trace Preserving)：$\forall X_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ に対して

$$\mathrm{Tr}[\mathcal{E}(X_A)] = \mathrm{Tr}[X_A] \tag{3}$$

- (ii) で $\mathcal{H}_R = \mathbb{C}$ とすれば，(ii)' 正値性：$X_A \geq 0 \implies \mathcal{E}(X_A) \geq 0$ が導かれる．



完全正値性は，入力系 $\mathcal{H}_A$ とエンタングルしているかも知れない外界系 $\mathcal{H}_R$（参照系, reference system）も含め，密度作用素が密度作用素に写像されるための要請である．

- Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の密度作用素の集合を

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{\, \rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid \rho \geq 0,\ \mathrm{Tr}\,\rho = 1 \,\}$$

とする．CPTP 写像 $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ について，特に，

$$\rho_A \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \implies \mathcal{E}(\rho_A) \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$$

である．実際，正値性 (ii)' より $\mathcal{E}(\rho_A) \geq 0$，トレース保存条件 (iii) より $\mathrm{Tr}\,\mathcal{E}(\rho_A) = 1$ が示される．

- 定義域を密度作用素の集合 $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ に制限した写像

$$\mathcal{E} : \rho_A \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \longmapsto \mathcal{E}(\rho_A) \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_B) \tag{4}$$

を CPTP 写像 / 量子通信路 (quantum channel) / 量子操作 (quantum operation) とよぶことも多い．

- 逆に，制限された写像 (4) は，線形拡大により一意に $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ を定める．
実際，極化形式：

$$|x\rangle\langle y| = \frac{1}{2}\Big\{|a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b| + \sqrt{-1}\big(|c\rangle\langle c| - |d\rangle\langle d|\big)\Big\}$$

$$|a\rangle := \frac{|x\rangle + |y\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |b\rangle := \frac{|x\rangle - |y\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |c\rangle := \frac{|x\rangle + \sqrt{-1}\,|y\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |d\rangle := \frac{|x\rangle - \sqrt{-1}\,|y\rangle}{\sqrt{2}}$$

により，

$$\mathcal{E}(|x\rangle\langle y|) = \frac{1}{2}\Big[\mathcal{E}(|a\rangle\langle a|) - \mathcal{E}(|b\rangle\langle b|) + \sqrt{-1}\big\{\mathcal{E}(|c\rangle\langle c|) - \mathcal{E}(|d\rangle\langle d|)\big\}\Big]$$

であり，$\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ の基底 $|i\rangle\langle j|$ の行き先 $\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)$ は，$\mathcal{S}(\mathcal{H}_A)$ における $\mathcal{E}$ の値のみで定まる．

$$
\begin{tikzcd}
\text{(a) CPTP写像} \arrow[r] & \text{(d) Choi行列} \arrow[d] & \\
& \text{(b) Kraus表現} \arrow[ul, "\text{Lem 2}"] \arrow[r, shift left, "\text{Lem 3}"] & \text{(c) Stinespring表現} \arrow[l, shift left, "\text{Lem 4}"]
\end{tikzcd}
$$

Definition 2. 写像 $\mathcal{E}:\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)\to\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ が

$$\mathcal{E}(X_A)=\sum_{k=1}^{m}E_kX_AE_k^* \quad (E_k:\mathcal{H}_A\to\mathcal{H}_B,\ k=1,\dots,m) \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{m}E_k^*E_k=I_A \tag{6}$$

と書けるとき， $\mathcal{E}$ はKraus表現 / operator sum表現を持つという． $\{E_k\}_{k=1}^m$ はKraus operatorとよばれる．

Lemma 1. (5)で定義される写像$\mathcal{E}$について以下は同値である． ((6)はトレース保存条件である)

(i) $\forall X_A\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$, $\mathrm{Tr}\,\mathcal{E}(X_A)=\mathrm{Tr}\,X_A$ （トレース保存）

(ii) $\mathcal{E}$は(6)をみたす．

（証明） $\mathrm{Tr}[\mathcal{E}(X_A)]=\mathrm{Tr}\left[\sum_{k=1}^{m}E_kX_AE_k^*\right]=\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{k=1}^{m}E_k^*E_k\right)X_A\right]$ であるから，(ii) $\Rightarrow$ (i)は明らか．
一方で，この式より，(i)を仮定すると，

$$\left\langle\!\!\left\langle\sum_k E_k^*E_k-I_A,X_A\right\rangle\!\!\right\rangle=\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_k E_k^*E_k-I_A\right)X_A\right]=\mathrm{Tr}\,\mathcal{E}(X_A)-\mathrm{Tr}\,X_A\overset{\text{(i)}}{=}0 \quad (\forall X_A\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_A))$$

が成立するので(ii)が成り立つ． $\square$

Lemma 2. Kraus表現を持つ写像はCPTP写像である．

（証明） $\mathcal{E}$ がKraus表現(5)を持つと仮定する．(i) 線形性は明らかである．(ii) 完全正値性：まず，

$$(\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E})(X_{RA}) = \sum_k (I_R \otimes E_k) X_{RA} (I_R \otimes E_k)^* \tag{7}$$

を示す．このことは，$X_{RA} = X_R \otimes X_A$ のときに確認すれば十分である：

$$(\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E})(X_R \otimes X_A) = X_R \otimes \mathcal{E}(X_A) = X_R \otimes \left(\sum_k E_k X_A E_k^* \right) = \sum_k (I_R \otimes E_k)(X_R \otimes X_A)(I_R \otimes E_k)^*$$

(7)式より，半正定値性の性質（7.4 Lemma 4：$A \geq 0 \;\Rightarrow C^* AC \geq 0$，$A \geq 0,\, B \geq 0 \;\Rightarrow A + B \geq 0$）を用いると，完全正値性(ii)が示される．トレース保存条件(iii)はLemma 1で確認した． □

9.6 Stinespring表現

Definition 3. 写像 $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ が，等距離作用素 $V : \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$ を用いて

$$\mathcal{E}(X_A) = \mathrm{Tr}_E \left[V X_A V^* \right] \tag{8}$$

と書けるとき，$\mathcal{E}$ はStinespring表現を持つという．$\mathcal{H}_E$ は環境系(environment system)とよばれる．

Lemma 3. Kraus表現を持つ写像はStinespring表現で表すことができる.

（証明） $\mathcal{E}$がKraus表現(5)をもつと仮定する.
$\mathcal{H}_E$を正規直交基底$\{|k\rangle\}_{k=1}^m$を持つm次元Hilbert空間とし，作用素$V:\mathcal{H}_A \longrightarrow \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$を

$$V : |x\rangle \longmapsto V|x\rangle := \sum_{k=1}^m E_k |x\rangle \otimes |k\rangle$$

により定義すると，Vは等距離作用素となる：

$$\langle Vx \,|\, Vy\rangle = \left(\sum_{k=1}^m E_k |x\rangle \otimes |k\rangle\right)^* \left(\sum_{\ell=1}^m E_\ell |y\rangle \otimes |\ell\rangle\right)$$
$$= \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m \langle x| E_k^* E_\ell |y\rangle \langle k \,|\, \ell\rangle$$
$$= \sum_{k=1}^m \langle x| E_k^* E_k |y\rangle = \langle x \,|\, y\rangle$$

一方，

$$\mathrm{Tr}_E\left[V|x\rangle\langle y|V^*\right]$$
$$= \mathrm{Tr}_E\left[\left(\sum_{k=1}^m E_k|x\rangle \otimes |k\rangle\right)\left(\sum_{\ell=1}^m E_\ell|y\rangle \otimes |\ell\rangle\right)^*\right]$$
$$= \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m \mathrm{Tr}_E\left[E_k|x\rangle\langle y|E_\ell^* \otimes |k\rangle\langle \ell|\right]$$
$$= \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m E_k|x\rangle\langle y|E_\ell^* \cdot \mathrm{Tr}[|k\rangle\langle\ell|] = \sum_{k=1}^m E_k|x\rangle\langle y|E_k^*$$

であるので，$\mathcal{E}$はStinespring表現

$$\mathcal{E}(X_A) = \mathrm{Tr}_E\left[VX_AV^*\right] \tag{9}$$

を持つことが示された. □

Lemma 4. Stinespring表現を持つ写像はKraus表現で表すことができる.

(証明) $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ が，環境系 $\mathcal{H}_E$ と等距離作用素 $V : \mathcal{H}_A \longrightarrow \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$ を用いて，

$$\mathcal{E}(X_A) = \mathrm{Tr}_E \left[V X_A V^* \right]$$

で表せると仮定する．部分トレースの計算式より，

$$\mathcal{E}(X_A) = \sum_k \underbrace{(I_B \otimes \langle k|)V}_{:=E_k} X_A \underbrace{V^*(I_B \otimes |k\rangle)}_{E_k^*}$$

と書ける．ここで

$$E_k := (I_B \otimes \langle k|)V$$

とおく．

$$\mathcal{H}_A \xrightarrow{V} \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E \xrightarrow{I_B \otimes \langle k|} \mathcal{H}_B \otimes \mathbb{C} = \mathcal{H}_B$$

に注意すると，E_k は $\mathcal{H}_A$ から $\mathcal{H}_B$ への線形作用素で，

$$\mathcal{E}(X_A) = \sum_k E_k X_A E_k^*$$

が成り立つ．一方で，

$$\begin{aligned} \sum_k E_k^* E_k &= \sum_k V^*(I_B \otimes |k\rangle)(I_B \otimes \langle k|)V \\ &= V^* \left(I_B \otimes \sum_k |k\rangle\langle k| \right) V \\ &= V^* V \\ &= I_A \end{aligned}$$

であるから，$\mathcal{E}$ はKraus表現を持つ． □

量子通信路に関する理論のアウトライン

$$
\begin{tikzcd}
\text{(a) CPTP写像} \arrow[r, "\text{Thm 1}"] & \text{(d) Choi行列} \arrow[d, "\text{Lem 8}"] & \\
& \text{(b) Kraus表現} \arrow[ul, "\text{Lem 2}"] \arrow[r, shift left, "\text{Lem 3}"] & \text{(c) Stinespring表現} \arrow[l, shift left, "\text{Lem 4}"]
\end{tikzcd}
$$

9.8 Choi 行列，Choi–Jamiolkowski 同型 (isomorphism)

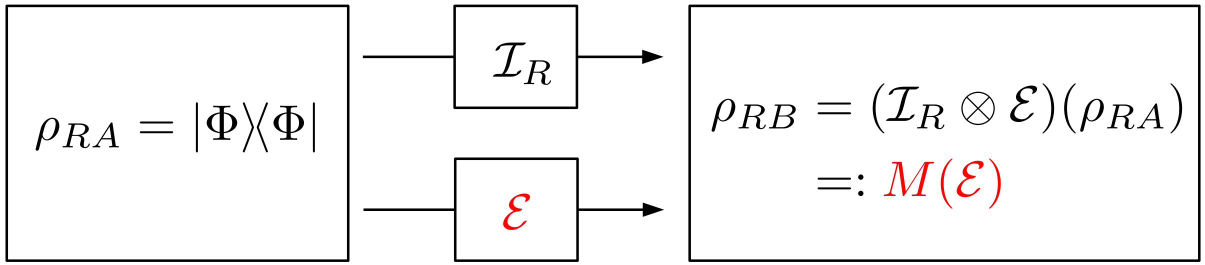
- 系 $\mathcal{H}_A$ から系 $\mathcal{H}_B$ へのCPTP写像全体を

$$CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B) := \{\, \mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B) \mid \mathcal{E}\text{ はCPTP写像}\,\}$$

とおく．$d := \dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_R$ となる参照系 $\mathcal{H}_R$ を考え，最大エンタングル状態を以下で固定する：

$$|\Phi\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^{d} |i\rangle \otimes |i\rangle \in \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_A$$

- この最大エンタングル状態を，合成通信路 $\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E}$ で操作した出力側の密度作用素を考える．



参照系 $\mathcal{H}_R$ には何もしていないので，

$$\mathrm{Tr}_B\, M(\mathcal{E}) = \mathrm{Tr}_B[\rho_{RB}] = \mathrm{Tr}_A[\rho_{RA}] = \frac{1}{d} I_R$$

- この性質を満たす $\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_B$ 上の半正定値作用素の集合を

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_B) := \{\, M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_B) \mid M \geq 0,\ \mathrm{Tr}_B[M] = \frac{1}{d} I_R \,\} \quad (\mathcal{H}_A \simeq \mathcal{H}_R) \tag{10}$$

とおく．

Theorem 1 (量子通信路のパラメータ表現). 写像

$$\mathcal{E} \in CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B) \longmapsto M(\mathcal{E}) := (\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E})(|\Phi\rangle\langle\Phi|) \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B) \tag{11}$$

は全単射かつアファイン (Choi–Jamiolkowski isomorphism). $M(\mathcal{E})$ は Choi 行列とよばれる.

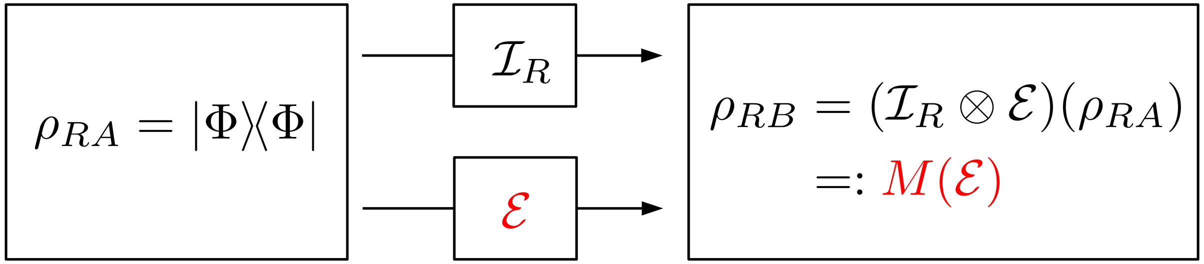
（アファイン性）$\mathcal{E}, \mathcal{F} \in CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ の凸結合 $t\mathcal{E} + (1-t)\mathcal{F} \in CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ が以下で定義される.

$$\big(t\mathcal{E} + (1-t)\mathcal{F}\big)(X_A) := t\mathcal{E}(X_A) + (1-t)\mathcal{F}(X_A) \quad (0 \le t \le 1)$$

$t\mathcal{E} + (1-t)\mathcal{F}$ は確率 t で $\mathcal{E}$，確率 $1-t$ で $\mathcal{F}$ に従って量子状態が変化した場合の量子通信路である.

Lemma 5. (11) はアファイン写像である（凸結合を凸結合に移す).

（証明）
$$\begin{aligned} M(t\mathcal{E} + (1-t)\mathcal{F}) &= (\mathcal{I}_R \otimes (t\mathcal{E} + (1-t)\mathcal{F}))(|\Phi\rangle\langle\Phi|) \\ &= t(\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E})(|\Phi\rangle\langle\Phi|) + (1-t)(\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{F})(|\Phi\rangle\langle\Phi|) = tM(\mathcal{E}) + (1-t)M(\mathcal{F}) \end{aligned}$$
□



Choi 行列の直感的理解

$$|\Phi\rangle\langle\Phi| = \frac{1}{d}\left(\sum_{i=1}^{d}|i\rangle\otimes|i\rangle\right)\left(\sum_{j=1}^{d}\langle j|\otimes\langle j|\right) = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}|i\rangle\langle j|\otimes|i\rangle\langle j|$$

より，Choi 行列 $M(\mathcal{E})$ の Kronecker 積表現は以下で与えられる．

$$M(\mathcal{E}) = (\mathcal{I}_R\otimes\mathcal{E})(|\Phi\rangle\langle\Phi|) = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}|i\rangle\langle j|\otimes\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) \simeq \frac{1}{d}\begin{bmatrix} & & \\ & \mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) & \\ & & \end{bmatrix} \tag{12}$$

最後の式は i, j ブロックに行列 $\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)$ を並べた行列である．

- $M(\mathcal{E})$ は各ブロックに $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ の基底 $|i\rangle\langle j|$ の行き先 $\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)$ を並べた行列であるから，写像 $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ の情報をすべて含んでいる．
- アファイン性を有していることも容易に分かる．

Lemma 6. (11) は $CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ から $\mathcal{M}(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_B)$ への単射である．

（証明） 最初に $\mathcal{E} \in CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B) \ \Rightarrow\ M(\mathcal{E}) \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_B)$ を示す．$\mathcal{E} \in CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ を仮定すると，$M(\mathcal{E})$ の定義 (11) と完全正値性より $M(\mathcal{E}) \geq 0$ である．一方，(12) とトレース保存条件より，

$$\mathrm{Tr}_B[M(\mathcal{E})] = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} |i\rangle\langle j| \otimes \mathrm{Tr}[\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)] = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} |i\rangle\langle j|\,\delta_{ij} = \frac{1}{d} I_R$$

が成り立つので $M(\mathcal{E}) \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_B)$ が示された．
単射であることは (12) の表現より明らかである．すなわち，$\mathcal{E}, \mathcal{F} \in CP(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ について，(12) より $M(\mathcal{E}) = M(\mathcal{F})$ ならば $\forall i, j,\ \mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) = \mathcal{F}(|i\rangle\langle j|)$ である．これは $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ を意味する． □

Lemma 7. (11) は全射である．

（証明） （Step 1） $M \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_B)$ の Kronecker 積表現

$$M = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} |i\rangle\langle j| \otimes M_{i,j} = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} & & \\ & M_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}_{ij}$$

を考え，基底 $|i\rangle\langle j| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ の行き先を $M_{i,j}$ とする写像を $\mathcal{E}_M(|i\rangle\langle j|) := M_{i,j}$ とする．

作り方と(12)から$M(\mathcal{E}_M) = (\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E}_M)(|\Phi\rangle\langle\Phi|) = M$となることは明らかである．
（Step 2）$\mathcal{E}_M$がCPTP写像であることを以下の補題で示す． $\square$

Lemma 8. $M \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_B)$ならば，上の$\mathcal{E}_M$はKraus表現をもつ．
（よって，Lemma 2より$\mathcal{E}_M$はCPTP写像である）

（証明） $M \geq 0$であるから，$|\Psi_k\rangle \in \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_B$を用いて

$$M = \sum_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k| \tag{13}$$

と書ける（例えば，Mの固有値分解を考えればよい）．ここで，$\mathcal{L}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$を$\mathcal{H}_A$から$\mathcal{H}_B$への線形写像全体とすると，

$$E \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B) \mapsto (I_R \otimes E)\,|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_B \simeq \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

は1対1で線形な対応を与える（同型対応：8.2 Lemma 3 (iv)）． したがって，各kについて
$E_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$が存在して，$|\Psi_k\rangle = (I_R \otimes E_k)\,|\Phi\rangle$ と表わされる．これより，(13)は以下のように書ける．

$$M = \sum_k (I_R \otimes E_k)\,|\Phi\rangle\langle\Phi|\,(I_R \otimes E_k)^* = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} |i\rangle\langle j| \otimes \underbrace{\left(\sum_k E_k\,|i\rangle\langle j|\,E_k^*\right)}_{\mathcal{E}_M(|i\rangle\langle j|)} \tag{14}$$

よって，$\mathcal{E}_M$ は以下の式で与えられることが示された．

$$\mathcal{E}_M(X_A) = \sum_k E_k X_A E_k^*$$

(14) で部分トレース Tr_B をとると，

$$\frac{1}{d} I_R \overset{\text{(a)}}{=} \mathrm{Tr}_B\, M = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} |i\rangle\langle j| \cdot \mathrm{Tr}_B\, \mathcal{E}_M(|i\rangle\langle j|)$$

ここで，(a) の部分は $\mathcal{M}(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_B)$ の定義による．成分を比較すると，

$$\mathrm{Tr}\, \mathcal{E}_M(|i\rangle\langle j|) = \delta_{ij}$$

これはトレース保存条件に他ならない．以上より，$\mathcal{E}_M$ が Kraus 表現を持つことが示された． $\square$