

2021年7月21日

量子情報数理特論

(第14回) 量子 f -ダイバージェンス, 量子 Stein の補題: 逆定理

電気通信大学 大学院情報理工学研究科

小川朋宏

13 量子 f -ダイバージェンス, 量子 Stein の補題 : 逆定理

最終レポート

- (1) 以下の量子ゲートについて説明せよ
 - (a) CNOT ゲート (controlled NOT gate)
 - (b) Hadamard ゲート
- (2) 量子アルゴリズムのうち, Deutsch-Jozsa のアルゴリズムについて説明せよ.
- (3) (オプション) 国内外における量子コンピュータの稼働状況について調査せよ.

締切 : 2021 年 8 月 27 日 (金)

分量の目安 : A4 で 5 枚以内

提出場所 : Slack の DM

コメント :

- ここまで履修した人は量子計算の初歩についても容易に理解できる.
- Deutsch-Jozsa アルゴリズムの最後は状態識別になっている.

13.1 量子仮説検定の漸近理論（復習）

漸近論の設定

- 量子状態 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ または $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ のどちらかに準備された系を、（同一の準備状況で） n 回利用できるとする。
- この状況で得られる量子状態は、Hilbert 空間 $\mathcal{H}^{\otimes n} = \underbrace{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}_n$ において、

$$\rho^{\otimes n} = \underbrace{\rho \otimes \rho \otimes \cdots \otimes \rho}_n, \quad \sigma^{\otimes n} = \underbrace{\sigma \otimes \sigma \otimes \cdots \otimes \sigma}_n. \quad (1)$$

のどちらかである。

- 検定 (test)** は $0 \leq T_n \leq I_n$ を満たす $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の作用素 T_n で与えられ、POVM $\{T_n, I_n - T_n\}$ と同一視される。

以降、 $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}^{\otimes n}$, $\rho_n := \rho^{\otimes n}$, $\sigma_n := \sigma^{\otimes n}$ などと書く。

- 真の状態が ρ であるときに、誤って σ であると判定する確率（第一種誤り確率）は

$$\alpha_n(T_n) := \text{Tr } \rho_n(I_n - T_n)$$

- 真の状態が σ であるときに、誤って ρ であると判定する確率（第二種誤り確率）は

$$\beta_n(T_n) := \text{Tr } \sigma_n T_n$$

13.2 量子Steinの補題：定数制約のトレードオフ（復習）

第一種誤り確率に $\alpha_n(T_n) \leq \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$) の定数制約を課した上で、第二種誤り確率を可能な限り小さくする問題を考える。

$$\beta_n^*(\varepsilon) = \min \{ \beta_n(T_n) \mid T_n : \text{test}, \alpha_n(T_n) \leq \varepsilon \} \quad (2)$$

Theorem 1 (量子Steinの補題). 任意の $0 < \forall \varepsilon < 1$ について,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \beta_n^*(\varepsilon) = -D(\rho \parallel \sigma) \quad (3)$$

ただし, $D(\rho \parallel \sigma) = \text{Tr } \rho(\log \rho - \log \sigma)$ は量子相対エントロピーである。

(意味) n が十分大きいとき, 第二種誤りの最適な減衰レートが量子相対エントロピーで与えられる。

$$\beta_n^*(\varepsilon) \simeq e^{-nD(\rho \parallel \sigma)} \quad (4)$$

(講義の目標) この定理を証明するため, 順次, 次の不等式の証明を与える。

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \beta_n^*(\varepsilon) \leq -D(\rho \parallel \sigma) \quad (\text{順定理, direct part}) \quad (5)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \beta_n^*(\varepsilon) \geq -D(\rho \parallel \sigma) \quad (\text{逆定理, converse part : 今日はこちらの証明}) \quad (6)$$

13.3 量子 Neyman-Pearson 検定 (復習)

Lemma 1 (第12回 Lemma 2). 任意のエルミート作用素 A について,

$$\mathrm{Tr} A_+ = \mathrm{Tr} A\{A > 0\} = \max_{0 \leq T \leq I} \mathrm{Tr} AT \quad (7)$$

Lemma 2 (第12回 Lemma 6). 任意のエルミート作用素 A, B について,

$$\min_{0 \leq T \leq I} \{\mathrm{Tr} A(I - T) + \mathrm{Tr} BT\} = \mathrm{Tr} A - \mathrm{Tr}(A - B)_+ \quad (8)$$

ここで, 最小化は $S := \{A - B > 0\}$ で達成される.

Lemma 3 (第12回 Lemma 9). $A = \rho, B = e^a \sigma$ ($a \in \mathbb{R}$) とおくことで,

$$\min_{0 \leq T \leq I} \{\alpha(T) + e^a \beta(T)\} = \min_{0 \leq T \leq I} \{\mathrm{Tr} \rho(I - T) + e^a \mathrm{Tr} \sigma T\} = 1 - \mathrm{Tr}(\rho - e^a \sigma)_+ \quad (9)$$

最小化は $S(a) := \{\rho - e^a \sigma > 0\}$ (量子 Neyman-Pearson 検定) で達成される.

13.4 作用素単調関数

Definition 1. 区間 $J \subseteq \mathbb{R}$ における実関数 $f : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える.
(固有値が関数 f の定義域 J に含まれている) 任意のエルミート作用素 A, B に対して,

$$A \leq B \implies f(A) \leq f(B) \quad (10)$$

が成り立つとき, f は作用素単調関数 (operator monotone function) であるという.

Example 1.

- $f(t) = \log t$ は作用素単調関数
- $f(t) = t^s$ ($s \in [0, 1]$) は作用素単調関数
- $f(t) = t^s$ ($s \notin [0, 1]$) は作用素単調関数ではない
- $f(t) = -1/t$ は作用素単調関数 (インバースは作用素逆単調)

13.5 作用素凸関数

Definition 2. 区間 $J \subseteq \mathbb{R}$ における実関数 $f : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える.

(固有値が関数 f の定義域 J に含まれている) 任意のエルミート作用素 A, B に対して,

$$tf(A) + (1 - t)f(B) \geq f(tA + (1 - t)B) \quad (0 \leq \forall t \leq 1) \quad (11)$$

が成り立つとき, f は作用素凸関数 (operator convex function) であるという.

Example 2.

- $f(t) = -\log t$ は作用素凸関数
- $f(t) = t \log t$ は作用素凸関数
- $f(t) = -t^s$ ($s \in [0, 1]$) は作用素凸関数
- $f(t) = t^s$ ($s \in [-1, 0] \cup [1, 2]$) は作用素凸関数
- $f(t) = t^s$ ($s \notin [-1, 0] \cup [1, 2]$) は作用素凸関数ではない
- $f(t) = 1/t$ は作用素凸関数 (インバースは作用素凸関数)

13.6 相対モジュラーオペレーター

Definition 3 (左作用, 右作用).

$$L_A : X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mapsto AX \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad (\text{左掛け算作用}) \quad (12)$$

$$R_B : X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mapsto XB \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad (\text{右掛け算作用}) \quad (13)$$

任意の $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対して, $L_A R_B X = AXB = R_B L_A X$ であるから, L_A と R_B は可換である.

Definition 4. 相対モジュラーオペレーター (relative modular operator) を

$\Delta_{A,B} := L_A R_{B^{-1}}$ で定義する. すなわち,

$$\Delta_{A,B} : X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mapsto \Delta_{A,B}(X) = AXB^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad (14)$$

簡単のため, $\Delta = \Delta_{A,B}$ と書くこともある.

Lemma 4.

- (i) $A \geq 0$ のとき, $L_A \geq 0$
- (ii) $B \geq 0$ のとき, $R_B \geq 0$
- (iii) $A, B \geq 0$ のとき, $\Delta_{A,B} \geq 0$ であり, 特に $\Delta_{A,B}$ はエルミート

(証明) 任意の $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ について次式が成り立つことから, (i) (ii) が成立.

$$\langle\langle X, L_A X \rangle\rangle = \text{Tr}[X^* A X] = \text{Tr}[(\sqrt{A} X)^* (\sqrt{A} X)] \geq 0$$

$$\langle\langle X, R_A X \rangle\rangle = \text{Tr}[X^* X A] = \text{Tr}[(X \sqrt{A})^* (X \sqrt{A})] \geq 0$$

(iii) L_A は $R_{B^{-1}}$ は半正定値で可換であるから, $\Delta_{A,B} = L_A R_{B^{-1}} = (L_A^{1/2} R_{B^{-1}}^{1/2})^2 \geq 0$ □

Remark 1 (別の考え方). 密度作用素 $\rho, \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対して,

$$\langle X, Y \rangle_\rho^- := \text{Tr} \rho X^* Y, \quad \langle X, Y \rangle_\sigma^+ := \text{Tr} \sigma Y X^* \quad (15)$$

とおくと, これらは $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の半双線型形式 (sesquilinear form) で, $\rho > 0, \sigma > 0$ のとき内積になる. 相対モジュラーオペレーター $\Delta_{\sigma,\rho}$ は次式を満たす作用素として定義してもよい.

$$\langle X, \Delta_{\sigma,\rho} Y \rangle_\rho^- = \text{Tr}[\rho \cdot X^* \cdot \sigma Y \rho^{-1}] = \text{Tr} \sigma Y X^* = \langle X, Y \rangle_\sigma^+ \quad (16)$$

上式で $X = Y$ とすれば,

$$\langle X, \Delta_{\sigma,\rho} X \rangle_\rho^- = \langle X, X \rangle_\sigma^+ \geq 0 \quad (17)$$

であるから, $\Delta_{\sigma,\rho} \geq 0$ が分かる. 特に, $\Delta_{\sigma,\rho}$ はエルミート作用素である.

13.7 量子 f -ダイバージェンス

Definition 5 (量子 f -ダイバージェンス, Quasi-Entropy).

$$D_f^X(\rho||\sigma) := \langle X, f(\Delta)(X) \rangle_\rho^- \quad (X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})) \quad (18)$$

$$D_f(\rho||\sigma) := D_f^I(\rho||\sigma) = \langle I, f(\Delta)(I) \rangle_\rho^- = \text{Tr}[\rho \cdot f(\Delta_{\sigma,\rho})(I)] \quad (19)$$

密度作用素 $\rho, \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対して, スペクトル分解

$$\rho = \sum_i a_i E_i, \quad \sigma = \sum_j b_j F_j \quad (20)$$

を考える. (簡単のため $\rho, \sigma > 0$ を仮定)

$$\Delta(F_j E_i) = \sigma F_j E_i \rho^{-1} = \frac{b_j}{a_i} F_j E_i \quad (21)$$

であるから, $\Delta_{\sigma,\rho}$ の固有値は $\frac{b_j}{a_i}$ で, 対応する固有ベクトルは $F_j E_i$ である.

$$\Delta^n(F_j E_i) = \left(\frac{b_j}{a_i} \right)^n F_j E_i \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (22)$$

であるから, 関数 $f(t)$ のテーラー展開を考えれば,

$$f(\Delta)(F_j E_i) = f\left(\frac{b_j}{a_i}\right) F_j E_i \quad (23)$$

が成り立つ。これより,

$$f(\Delta)(I) = f(\Delta) \left(\sum_i \sum_j F_j E_i \right) = \sum_i \sum_j f(\Delta)(F_j E_i) = \sum_i \sum_j f\left(\frac{b_j}{a_i}\right) (F_j E_i) \quad (24)$$

$$D_f(\rho||\sigma) = \text{Tr}[\rho \cdot f(\Delta)(I)] = \sum_i \sum_j a_i f\left(\frac{b_j}{a_i}\right) \text{Tr} F_j E_i = \sum_i \sum_j (a_i \text{Tr} E_i F_j) \cdot f\left(\frac{b_j \text{Tr} E_i F_j}{a_i \text{Tr} E_i F_j}\right) \quad (25)$$

よって, 量子 f -ダイバージェンスは, 古典 f -ダイバージェンスでもある。すなわち,

$$p(i, j) = a_i \text{Tr} E_i F_j, \quad q(i, j) = b_i \text{Tr} E_i F_j \quad (26)$$

とおけば, $D_f(\rho||\sigma) = D_f(p||q)$ である。

Theorem 2 (単調性). $f(t)$ が作用素凸関数であるとき, 任意の CPTP 写像 $\mathcal{E}$ について,

$$D_f(\rho||\sigma) \geq D_f(\mathcal{E}(\rho)||\mathcal{E}(\sigma)) \quad (27)$$

(証明) 古典 f -ダイバージェンスの場合と同様のアイデアであるが難しい。省略。

M. Ohya and D. Petz, Quantum Entropy and Its Use, Springer, 1993.

D. Petz, Quantum Information Theory and Quantum Statistics, Springer, 2008.

13.8 量子 f -ダイバージェンスの例

Lemma 5. エルミート作用素 $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対して,

$$f(L_A) = L_{f(A)}, \quad f(R_B) = R_{f(B)} \quad (28)$$

(証明) 左作用 L_A について (28) を示す (右作用 R_A の場合も同様). 任意の $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ について,

$$(L_A)^n X = A^n X = L_{A^n} X \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (29)$$

であるから, $f(t) = t^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) のとき (28) が成り立つ. 線形性

$$L_{aA+bB} = aL_A + bL_B \quad (a, b \in \mathbb{C}, A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})) \quad (30)$$

が成り立つので, $f(t)$ が多項式の場合も (28) が成立. 一般の場合, $f(t)$ のテーラー展開を考えればよい.

Example 3. $f(t) = -\log t$ のときは, 量子相対エントロピー $D(\rho||\sigma)$ である.

左作用と右作用の可換性から,

$$-\log \Delta = -\log L_\sigma R_{\rho^{-1}} = -(\log L_\sigma + \log R_{\rho^{-1}}) \stackrel{(28)}{=} -(L_{\log \sigma} + R_{\log \rho^{-1}})$$

よって,

$$D_f(\rho||\sigma) = \text{Tr } \rho (-\log \Delta)(I) = -\text{Tr } \rho (\log \sigma + \log \rho^{-1}) = \text{Tr } \rho (\log \rho - \log \sigma) = D(\rho||\sigma)$$

Example 4. $f(t) = t \log t$ のときは, 量子相対エントロピー $D(\sigma||\rho)$ である.

$\Delta \log \Delta = (L_\sigma R_{\rho^{-1}}) \log(L_\sigma R_{\rho^{-1}}) = (L_\sigma R_{\rho^{-1}})(\log L_\sigma + \log R_{\rho^{-1}}) \stackrel{(28)}{=} (L_\sigma R_{\rho^{-1}})(L_{\log \sigma} + R_{\log \rho^{-1}})$
 であるから,

$$(\Delta \log \Delta)(I) = (L_\sigma R_{\rho^{-1}})(\log \sigma + \log \rho^{-1}) = \sigma(\log \sigma - \log \rho)\rho^{-1}$$

よって,

$$D_f(\rho||\sigma) = \text{Tr } \rho (\Delta \log \Delta)(I) = \text{Tr} [\rho \cdot \sigma(\log \sigma - \log \rho)\rho^{-1}] = \text{Tr } \sigma(\log \sigma - \log \rho) = D(\sigma||\rho)$$

Example 5. $f(t) = t^{1-s}$ のとき,

$$D_f(\rho||\sigma) = \text{Tr } \rho (\Delta^{1-s})(I) = \text{Tr } \rho \sigma^{1-s} \rho^{-(1-s)} = \text{Tr } \rho^s \sigma^{1-s} \quad (31)$$

Lemma 6 (単調性の系). 任意の CPTP 写像について,

$$\text{Tr } \rho^s \sigma^{1-s} \leq \text{Tr } \mathcal{E}(\rho)^s \mathcal{E}(\sigma)^{1-s} \quad (s \in [0, 1]) \quad (32)$$

$$\text{Tr } \rho^s \sigma^{1-s} \geq \text{Tr } \mathcal{E}(\rho)^s \mathcal{E}(\sigma)^{1-s} \quad (s \in [-1, 0] \cup [1, 2]) \quad (\leftarrow \text{これを使う}) \quad (33)$$

13.9 量子 Stein の補題 : converse part

Theorem 3 (量子 Stein の補題). 任意の $0 < \varepsilon < 1$ について,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \beta_n^*(\varepsilon) = -D(\rho || \sigma) \quad (34)$$

Theorem 4 (converse part). 任意の $0 \leq \varepsilon < 1$ について,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \beta_n^*(\varepsilon) \geq -D(\rho || \sigma) \quad (35)$$

を証明する.

$\beta_n^*(\varepsilon)$ を達成する検定 $0 \leq T_n \leq I_n$ について, $\alpha_n(T_n) \leq \varepsilon$ であるから, 以下を示せばよい.

Theorem 5. 任意の検定列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($0 \leq T_n \leq I_n$) と, 任意の $0 \leq \varepsilon < 1$ について,

$$\alpha_n(T_n) \leq \varepsilon \implies \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \beta_n(T_n) \geq -D(\rho || \sigma) \quad (36)$$

13.10 量子Steinの補題：逆定理の証明

Lemma 7. 任意の $a > D(\rho||\sigma)$ について,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(S_n(a)) = 1 \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Tr } \rho_n S_n(a) = 0 \right) \quad (37)$$

(証明) $\text{Tr}(\rho_n - e^{na}\sigma_n)_+ = \text{Tr}(\rho_n - e^{na}\sigma_n)S_n(a) \geq 0$ であるから,

$$\text{Tr } \rho_n S_n(a) \geq e^{na} \text{Tr } \sigma_n S_n(a) \quad (38)$$

任意の $1 \leq s \leq 2$ について,

$$\begin{aligned} \text{Tr } \rho_n S_n(a) &= \{\text{Tr } \rho_n S_n(a)\}^s \{\text{Tr } \rho_n S_n(a)\}^{1-s} \\ &\leq e^{na(1-s)} \{\text{Tr } \rho_n S_n(a)\}^s \{\text{Tr } \sigma_n S_n(a)\}^{1-s} \quad (\because 1-s \leq 0) \\ &\leq e^{na(1-s)} \left[\{\text{Tr } \rho_n S_n(a)\}^s \{\text{Tr } \sigma_n S_n(a)\}^{1-s} + \{\text{Tr } \rho_n (I_n - S_n(a))\}^s \{\text{Tr } \sigma_n (I_n - S_n(a))\}^{1-s} \right] \\ &\leq e^{na(1-s)} \text{Tr } \rho_n^s \sigma_n^{1-s} = e^{na(1-s)} (\text{Tr } \rho^s \sigma^{1-s})^n \end{aligned} \quad (39)$$

ただし, (39)の不等式ではLemma 6 (33) (単調性) を用いた. よって, $\psi(s) = \log \rho^s \sigma^{1-s}$ とおけば,

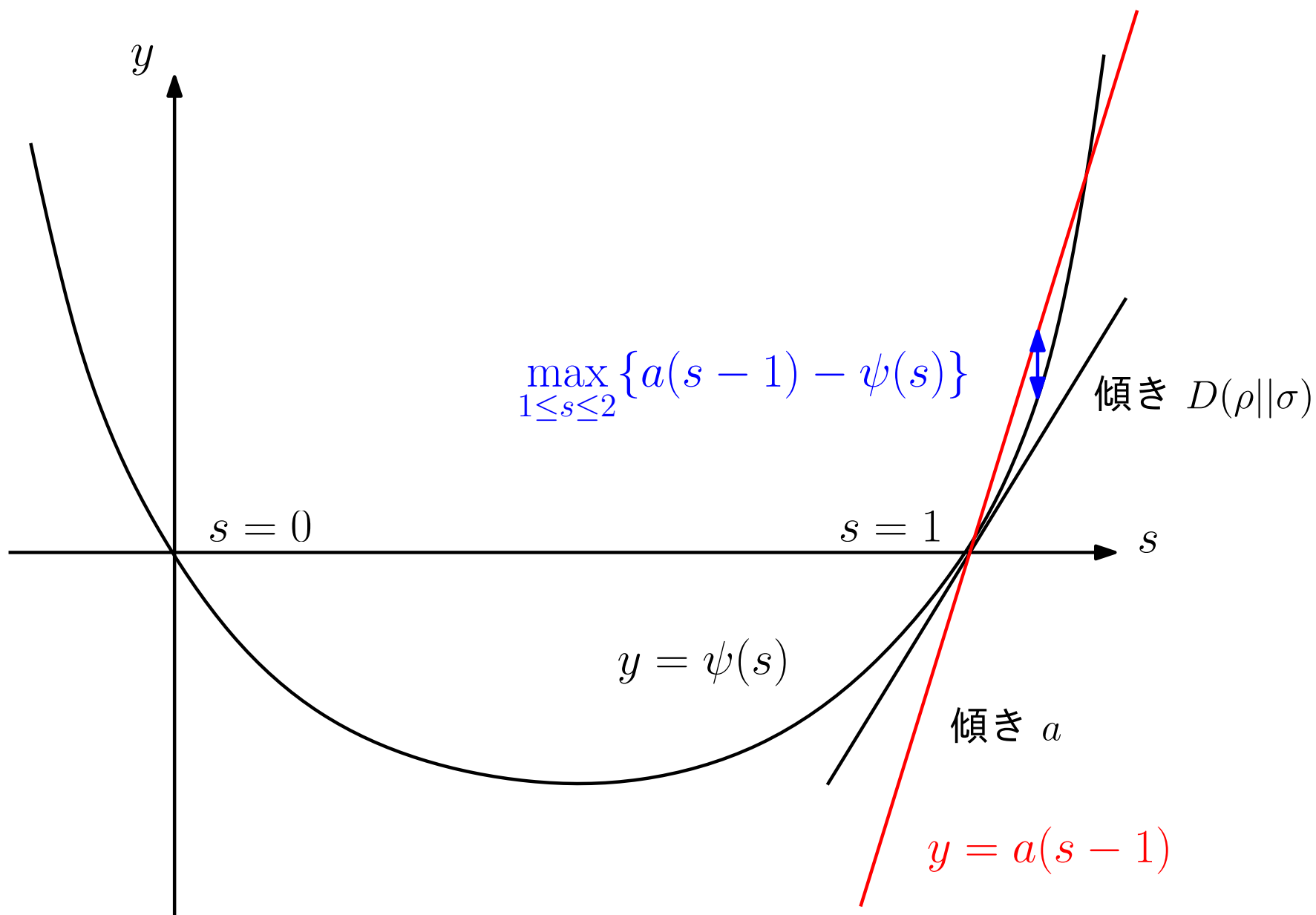
$$\text{Tr } \rho_n S_n(a) \leq \exp[-n \cdot \max_{1 \leq s \leq 2} \{a(s-1) - \psi(s)\}] \quad (40)$$

$\psi'(1) = D(\rho||\sigma)$ であるから, グラフより,

$$a > D(\rho||\sigma) \implies \max_{1 \leq s \leq 2} \{a(s-1) - \psi(s)\} > 0 \quad (41)$$

となって, $\text{Tr } \rho_n S_n(a) = 1 - \alpha_n(S_n(a)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ が示される.

□



(Theorem 5 の証明) Lemma 3 より, 任意の検定 $0 \leq T_n \leq I_n$ と実数 $a \in \mathbb{R}$ について,

$$\alpha_n(S_n(a)) \leq \alpha_n(S_n(a)) + e^{na}\beta_n(S_n(a)) \stackrel{\text{Lem 3}}{\leq} \alpha_n(T_n) + e^{na}\beta_n(T_n) \quad (42)$$

これより $\alpha_n(T_n) \leq \varepsilon$ のとき,

$$\beta_n(T_n) \geq e^{-na} \{ \alpha_n(S_n(a)) - \alpha_n(T_n) \} \geq e^{-na} \{ \alpha_n(S_n(a)) - \varepsilon \} \quad (43)$$

$a > D(\rho||\sigma)$ を仮定すると, Lemma 7 より $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(S_n(a)) = 1$ であるから,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \text{ (十分大きなすべての } n \text{ について)}, \alpha_n(S_n(a)) - \varepsilon > 0 \quad (44)$$

であり,

$$\frac{1}{n} \log \beta_n(T_n) \geq -a + \frac{1}{n} \log \{ \alpha_n(S_n(a)) - \varepsilon \} \quad (\forall n \geq N) \quad (45)$$

が成立する. 上式第二項はゼロに収束するので,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \beta_n(T_n) \geq -a \quad (46)$$

$a > D(\rho||\sigma)$ は任意であるから,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \beta_n(T_n) \geq -D(\rho||\sigma) \quad (47)$$

13.11 情報スペクトルの極限定理

Theorem 6.

$$\mathrm{Tr} \rho_n S_n(a) = \mathrm{Tr} \rho^{\otimes n} \{ \rho^{\otimes n} - e^{na} \sigma^{\otimes n} > 0 \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & a < D(\rho||\sigma) \\ 0 & a > D(\rho||\sigma) \end{cases} \quad (48)$$

- $a < D(\rho||\sigma)$ の場合は前回資料 Lemma 10 で示した.
- $a > D(\rho||\sigma)$ の場合は Lemma 7 で示した.

Theorem 7.

$$\mathrm{Tr} (\rho^{\otimes n} - e^{na} \sigma^{\otimes n})_+ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & a < D(\rho||\sigma) \\ 0 & a > D(\rho||\sigma) \end{cases} \quad (49)$$

(証明) $a > D(\rho||\sigma)$ のとき,

$$0 \leq \mathrm{Tr}(\rho_n - e^{na} \sigma_n)_+ = \mathrm{Tr}(\rho_n - e^{na} \sigma_n) S_n(a) \leq \mathrm{Tr} \rho_n S_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (50)$$

$a < D(\rho||\sigma)$ のとき, 次式 (Lemma 3) に注目する.

$$\alpha_n(S_n(a)) + e^{na} \beta_n(S_n(a)) = \min_{0 \leq T_n \leq I_n} \{ \mathrm{Tr} \rho_n (I_n - T_n) + e^{na} \mathrm{Tr} \sigma_n T_n \} = 1 - \mathrm{Tr}(\rho_n - e^{na} \sigma_n)_+ \quad (51)$$

$a < b < D(\rho||\sigma)$ となる $b \in \mathbb{R}$ をとり, $T_n = S_n(b)$ とすると,

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - \text{Tr}(\rho_n - e^{na}\sigma_n)_+ &\leq \alpha_n(S_n(b)) + e^{na}\beta_n(S_n(b)) \\ &\leq \alpha_n(S_n(b)) + e^{na}e^{-nb} \text{Tr} \rho_n S_n(b) \end{aligned} \quad (52)$$

ここで最後の不等式は(38)式より, 次式が成り立つことを用いた.

$$\beta_n(S_n(b)) = \text{Tr} \sigma_n S_n(b) \leq e^{-nb} \text{Tr} \rho_n S_n(b) \quad (53)$$

Theorem 6 より, $\alpha_n(S_n(b)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ であるから, (52) より以下が成り立つ.

$$\text{Tr}(\rho_n - e^{na}\sigma_n)_+ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (54)$$

□