量子通信路のまとめ

小川朋宏

2005 年 7 月 20 日

1 記号

- $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \mathcal{H}_R$: Hilbert 空間
- $\mathcal{L}(\mathcal{H})$: Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への線形作用素全体
- $\mathcal{S}(\mathcal{H})$: Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の密度作用素全体, i.e.,

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \{\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \,|\, \rho = \rho^* \geq 0, \mathrm{Tr}[\rho] = 1\}$$

2 量子通信路の定義

Definition 1 (量子通信路) 写像

$$\mathcal{E} : X_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{E}(X_A) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B) \tag{1}$$

が以下の 3 条件を満たすとき量子通信路であるという．

(i) 線形性：$\forall a, \forall b \in \mathbb{C}, \forall X_A, \forall Y_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ に対して

$$\mathcal{E}(aX_A + bY_A) = a\mathcal{E}(X_A) + b\mathcal{E}(Y_A) \tag{2}$$

(ii) 完全正値性 (Complete Positivity)：任意の系 $\mathcal{H}_R$ と $\forall X_{RA} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_A)$ について

$$X_{RA} \geq 0 \;\Rightarrow\; (\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E})(X_{RA}) \geq 0 \tag{3}$$

(iii) トレース保存 (Trace Preserving)：$\forall X_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ に対して

$$\mathrm{Tr}[\mathcal{E}(X_A)] = \mathrm{Tr}[X_A] \tag{4}$$

量子通信路を CPTP 写像 (Completely Positive and Trace Preserving map) とよぶこともある．

Remark 1 $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ が量子通信路であるとき，$\rho_A \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A)$ ならば $\mathcal{E}(\rho_A) \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$ である．よって，$\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ に制限した写像

$$\mathcal{E} : \rho_A \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{E}(\rho_A) \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_B) \tag{5}$$

を量子通信路とよぶことも多い．

逆に，制限された量子通信路 $\mathcal{E} : \mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$ は，線形性により一意に $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ を定める．このことは，極化形式：

$$|i\rangle\langle j| = \frac{1}{2}\left\{|a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b| + \sqrt{-1}\,(|c\rangle\langle c| - |d\rangle\langle d|)\right\} \tag{6}$$

ただし，

$$|a\rangle := \frac{|i\rangle + |j\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |b\rangle := \frac{|i\rangle - |j\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$|c\rangle := \frac{|i\rangle + \sqrt{-1}\,|j\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |d\rangle := \frac{|i\rangle - \sqrt{-1}\,|j\rangle}{\sqrt{2}}$$

を用いることで，次のようにして確かめられる．

$$\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{E}(|a\rangle\langle a|) - \mathcal{E}(|b\rangle\langle b|) + \sqrt{-1}\left\{\mathcal{E}(|c\rangle\langle c|) - \mathcal{E}(|d\rangle\langle d|)\right\}\right]$$

すなわち，$\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ の基底 $|i\rangle\langle j|$ の行き先 $\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)$ は，$\mathcal{S}(\mathcal{H}_A)$ における $\mathcal{E}$ の値のみで定めることができる．

Definition 2 (Kraus 表現) 写像 $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ が

$$\sum_k E_k^* E_k = I_A \tag{7}$$

を満たす作用素 $E_k : \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B$ の組 $\{E_k\}_k$ を用いて

$$\mathcal{E}(X_A) = \sum_k E_k X_A E_k^* \tag{8}$$

と書けるとき，$\mathcal{E}$ は Kraus 表現 (operator sum 表現) を持つという．

Lemma 1 (Kraus 表現 $\Rightarrow$ 量子通信路) Kraus 表現を持つ写像は量子通信路である．

証明：

(i) 線形性：

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(aX_A+bY_A)\\&=\sum_k E_k(aX_A+bY_A)E_k^*\\&=a\sum_k E_kX_AE_k^*+b\sum_k E_kY_AE_k^*\\&=a\mathcal{E}(X_A)+b\mathcal{E}(Y_A)\end{aligned}$$

(ii) 完全正値性：最初に $(\mathcal{I}_R\otimes\mathcal{E})(X_{RA})$ が

$$(\mathcal{I}_R\otimes\mathcal{E})(X_{RA})=\sum_k(I_R\otimes E_k)X_{RA}(I_R\otimes E_k)^* \tag{9}$$

で与えられることを示す．$|l\rangle\langle m|\otimes|i\rangle\langle j|$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H}_R\otimes\mathcal{H}_A)$ の基底を成すので，$X_R\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_R)$, $X_A\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ により $X_{RA}=X_R\otimes X_A$ と表わされる場合について (9) が成立することを示せばよい．これは以下のように示される．

$$\begin{aligned}&(\mathcal{I}_R\otimes\mathcal{E})(X_R\otimes X_A)\\&=X_R\otimes\mathcal{E}(X_A)\\&=X_R\otimes\left(\sum_k E_kX_AE_k^*\right)\\&=\sum_k(I_R\otimes E_k)(X_R\otimes X_A)(I_R\otimes E_k)^*\end{aligned}$$

完全正値性は (9) より明らかである．[*1]

(iii) トレース保存：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\mathcal{E}(X_A)]&=\mathrm{Tr}\left[\sum_k E_kX_AE_k^*\right]\\&=\sum_k\mathrm{Tr}\left[E_kX_AE_k^*\right]\\&=\sum_k\mathrm{Tr}\left[E_k^*E_kX_A\right]\\&=\mathrm{Tr}\left[\sum_k E_k^*E_kX_A\right] &(10)\\&=\mathrm{Tr}[X_A] &(11)\end{aligned}$$

ただし，最後の等式で (7) を用いた．

□

[*1] $A\geq 0\ \Rightarrow C^*AC\geq 0$ と $A\geq 0$, $B\geq 0\ \Rightarrow A+B\geq 0$ を用いればよい．

Definition 3 (Stinespring 表現) 写像 $\mathcal{E}:\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)\to\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ がある系 $\mathcal{H}_E$ と等距離作用素 $V:\mathcal{H}_A\to\mathcal{H}_B\otimes\mathcal{H}_E$ を用いて

$$\mathcal{E}(X_A)=\mathrm{Tr}_E[VX_AV^*] \tag{12}$$

と書けるとき, $\mathcal{E}$ は Stinespring 表現を持つという．このとき $\mathcal{H}_E$ は環境系 (environment system) とよばれる．

Remark 2 (等距離作用素)

$$\begin{aligned}&V:\mathcal{H}\to\mathcal{K}\ \text{が等距離作用素 (isometry)}\\&\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \forall|\psi\rangle,\forall|\varphi\rangle\in\mathcal{H},\ \langle V\psi,V\varphi\rangle=\langle\psi,\varphi\rangle &(13)\\&\Leftrightarrow\ V^*V=I_{\mathcal{H}} &(14)\end{aligned}$$

3 量子通信路のパラメータ表現

この節では，系 $\mathcal{H}_A$ から系 $\mathcal{H}_B$ への量子通信路全体

$$\mathcal{QO}:=\{\mathcal{E}:\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)\to\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)\,|\,\mathcal{E}:\text{量子通信路}\}$$

のパラーメタ表現を与える．$\mathcal{H}_A$ の次元 $d:=\dim\mathcal{H}_A$ と同じ次元をもつ系 $\mathcal{H}_R$ を考える．$\mathcal{H}_R\otimes\mathcal{H}_A$ における最大エンタングル状態 (maximally entangled state) を

$$|\Phi\rangle:=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{i=1}^d|i\rangle\otimes|i\rangle \tag{15}$$

で定義する．

Theorem 1 (量子通信路のパラメータ表現) 写像

$$\mathcal{E}\in\mathcal{QO}\mapsto M(\mathcal{E}):=(\mathcal{I}_R\otimes\mathcal{E})(|\Phi\rangle\langle\Phi|) \tag{16}$$

は量子通信路全体 $\mathcal{QO}$ から非負定値行列の集合

$$\mathcal{M}:=\left\{M\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_R\otimes\mathcal{H}_B)\,\middle|\,M\geq 0,\mathrm{Tr}_B[M]=\frac{1}{d}I_R\right\}$$

への 1 対 1 アファイン写像である．

直感的には Theorem 1 は次のように考えるとよい．

$$\begin{aligned}|\Phi\rangle\langle\Phi|&=\frac{1}{d}\left(\sum_{i=1}^d|i\rangle\otimes|i\rangle\right)\left(\sum_{j=1}^d\langle j|\otimes\langle j|\right)\\&=\frac{1}{d}\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d|i\rangle\langle j|\otimes|i\rangle\langle j|\end{aligned}$$

であるから，$M(\mathcal{E})$ の Kronecker 積表現は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} M(\mathcal{E}) &= (\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E})(|\Phi\rangle\langle\Phi|) \\ &= \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} |i\rangle\langle j| \otimes \mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) \qquad (17) \\ &\simeq \frac{1}{d}\begin{bmatrix} & & \\ & \mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) & \\ & & \end{bmatrix}_{ij} \qquad (18) \end{aligned}$$

ここで最後の式は i, j ブロックに行列 $\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)$ を並べた行列である．$M(\mathcal{E})$ は各ブロックに $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ の基底 $|i\rangle\langle j|$ の行き先 $\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)$ を並べた行列であるから，写像 $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ の情報をすべて含んでいる．

以降で Theorem 1 の証明を与えていくが，ここで Theorem 1 におけるアファイン性について説明しておく．量子通信路 $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathcal{QO}$ と $t \in [0, 1]$ に対して，量子通信路の凸結合 $t\mathcal{E} + (1-t)\mathcal{F}$ は以下で定義される．

$$(t\mathcal{E} + (1-t)\mathcal{F})(X_A) := t\mathcal{E}(X_A) + (1-t)\mathcal{F}(X_A) \qquad (19)$$

これは確率 t で $\mathcal{E}$，確率 $1-t$ で $\mathcal{F}$ にしたがって量子状態が変化した場合の量子通信路である．このとき以下により (16) がアファイン写像であることが確かめられる．

$$\begin{aligned} &M(t\mathcal{E} + (1-t)\mathcal{F}) \\ &= (\mathcal{I}_R \otimes (t\mathcal{E} + (1-t)\mathcal{F}))(|\Phi\rangle\langle\Phi|) \\ &= t(\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E})(|\Phi\rangle\langle\Phi|) + (1-t)(\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{F})(|\Phi\rangle\langle\Phi|) \\ &= tM(\mathcal{E}) + (1-t)M(\mathcal{F}) \qquad (20) \end{aligned}$$

Lemma 2 (量子通信路 $\Rightarrow$ パラメータ表現) (16) は $\mathcal{QO}$ から $\mathcal{M}$ への単射かつアファインな写像である．

証明： 最初に $\mathcal{E} \in \mathcal{QO} \Rightarrow M(\mathcal{E}) \in \mathcal{M}$ を示す．$\mathcal{E} \in \mathcal{QO}$ を仮定すると，$M(\mathcal{E})$ の定義 (16) と量子通信路の完全正値性より $M(\mathcal{E}) \geq 0$ である．一方 (17) と量子通信路のトレース保存条件より，

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_B[M(\mathcal{E})] &= \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} |i\rangle\langle j| \otimes \mathrm{Tr}[\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)] \\ &= \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} |i\rangle\langle j|\, \delta_{ij} \\ &= \frac{1}{d} I_R \end{aligned}$$

が成り立つので $M(\mathcal{E}) \in \mathcal{M}$ が示された．次に，単射であることは (18) の表現より明らかである．すなわち，$\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathcal{QO}$ について，(18) より $M(\mathcal{E}) = M(\mathcal{F})$ ならば $\forall i, j,\ \mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) = \mathcal{F}(|i\rangle\langle j|)$ である．これは $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ を意味する． □

最後に (16) が全射であることを示す．このために $M \in \mathcal{M}$ の Kronecker 積表現

$$\begin{aligned} M &= \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} |k\rangle\langle l| \otimes M_{kl} \\ &= \begin{bmatrix} & & \\ & M_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}_{ij} \qquad (21) \end{aligned}$$

を考え，$M \in \mathcal{M}$ の i, j ブロックを取り出す以下の操作を考える．

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_M(|i\rangle\langle j|) &:= d \cdot \mathrm{Tr}_R[(|i\rangle\langle j| \otimes \mathcal{I}_B)^* M] \\ &= d \cdot \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} \mathrm{Tr}_R[(|i\rangle\langle j| \otimes \mathcal{I}_B)^*(|k\rangle\langle l| \otimes M_{kl})] \\ &= d \cdot \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} \mathrm{Tr}[(|i\rangle\langle j|)^*(|k\rangle\langle l|)] \cdot M_{kl} \\ &= d \cdot M_{ij} \qquad (22) \end{aligned}$$

これにより $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ の基底 $|i\rangle\langle j|$ の行き先 $\mathcal{E}_M(|i\rangle\langle j|)$ が定義されるので，これを線形に拡張することで線形写像 $\mathcal{E}_M$ が定義される．作り方から $M(\mathcal{E}_M) = \mathcal{E}_M(|\Phi\rangle\langle\Phi|) = M$ となることは明らかである．以下で実際に $\mathcal{E}_M$ が量子通信路であることを示す．

Lemma 3 (パラメータ表現 $\Rightarrow$ Kraus 表現) $M \in \mathcal{M}$ ならば (22) の写像 $\mathcal{E}_M$ は Kraus 表現をもつ．

証明： $\mathcal{M}$ の定義より $M \geq 0$ であるから，$|\Psi_k\rangle \in \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_B$ を用いて

$$M = \sum_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k| \qquad (23)$$

と書ける．これは例えば M の固有値分解を考えればよい．ここで，$\mathcal{L}(\mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B)$ を $\mathcal{H}_A$ から $\mathcal{H}_B$ への線形写像全体とすると，

$$E \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B) \mapsto (I_R \otimes E)\,|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_B \qquad (24)$$

は $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B)$ と $\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_B$ の 1 対 1 で線形な対応を与える．したがって，各 k について $E_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B)$ が存在して，$|\Psi_k\rangle = (I_R \otimes E_k)\,|\Phi\rangle$ と表わされる．これ

より，(23) は以下のように書ける．

$$M = \sum_k (I_R \otimes E_k) |\Phi\rangle\langle\Phi| (I_R \otimes E_k)^* = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} |i\rangle\langle j| \otimes \left(\sum_k E_k |i\rangle\langle j| E_k^* \right) \tag{25}$$

これと (22) より，$\mathcal{E}_M$ は以下の式で与えられることが示された．

$$\mathcal{E}_M(X_A) = \sum_k E_k X_A E_k^* \tag{26}$$

また，$\mathcal{E}_M$ がトレース保存条件を満たすことが以下のように確かめられる．

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\, \mathcal{E}_M(|i\rangle\langle j|) &= d \cdot \mathrm{Tr}_B\, \mathrm{Tr}_R\, [(|i\rangle\langle j| \otimes \mathcal{I}_B)^* M] \\ &= d \cdot \mathrm{Tr}_R\, [(|i\rangle\langle j|)^*\, \mathrm{Tr}_B[M]] \\ &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{27}$$

ただし，最後の等式で $\mathcal{M}$ についての条件 $\mathrm{Tr}_B[M] = \frac{1}{d} I_R$ を用いた．ここで (26) と (10) を用いると，トレース保存条件より

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[\mathcal{E}_M(X_A)] &= \mathrm{Tr}\left[\sum_k E_k X_A E_k^* \right] \\ &= \mathrm{Tr}\left[\sum_k E_k^* E_k X_A \right] \\ &= \mathrm{Tr}[X_A] \end{aligned} \tag{28}$$

が成り立つ．よって，$\forall X_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ について

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_k E_k^* E_k - I_A \right) X_A \right] = 0 \tag{29}$$

が成立するので

$$\sum_k E_k^* E_k = I_A \tag{30}$$

が示された．(26) と (30) より $\mathcal{E}_M$ が Kraus 表現を持つことが示された． □

Lemma 3 と Lemma 1 を合わせると，(22) の写像 $\mathcal{E}_M$ が量子通信路であることが示された．また，Lemma 1, Lemma 2, Lemma 3 より

- 量子通信路 (Definition 1)
- Kraus 表現を持つ写像 (Definition 2)
- パラメータ表現 (22) を持つ写像

の間には 1 対 1 の対応があることが分かる．

4 Kraus 表現と Stinespring 表現

この節では Kraus 表現 (Definition 2) と Stinespring 表現 (Definition 3) の同等性を示す．

Lemma 4 (Kraus 表現 ⇒ Stinespring 表現) Kraus 表現を持つ写像は Stinespring 表現で表すことができる．

証明： $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ が，作用素の組

$$E_k : \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{31}$$

$$\sum_{k=1}^{m} E_k^* E_k = I_A \tag{32}$$

により，Kraus 表現

$$\mathcal{E}(X_A) = \sum_{k=1}^{m} E_k X_A E_k^* \tag{33}$$

で与えられているとする．このとき，$\mathcal{H}_E$ を正規直交基底 $\{|k\rangle\}_{k=1}^{m}$ を持つ m 次元の物理系とし，作用素 $V : \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$ を

$$V |i\rangle := \sum_{k=1}^{m} E_k |i\rangle \otimes |k\rangle \tag{34}$$

により定義すると，以下に示すように V は等距離作用素となる．

$$\begin{aligned} &\langle Vi|Vj\rangle \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} E_k |i\rangle \otimes |k\rangle \right)^* \left(\sum_{l=1}^{m} E_l |j\rangle \otimes |l\rangle \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \langle i| E_k^* E_l |j\rangle \langle k|l\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{m} \langle i| E_k^* E_k |j\rangle \\ &= \langle i|j\rangle \end{aligned} \tag{35}$$

ただし，最後の等号で (32) を用いた．一方，

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}_E[V |i\rangle\langle j| V^*] \\ &= \mathrm{Tr}_E \left[\left(\sum_{k=1}^{m} E_k |i\rangle \otimes |k\rangle \right) \left(\sum_{l=1}^{m} E_l |j\rangle \otimes |l\rangle \right)^* \right] \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \mathrm{Tr}_E\, [E_k |i\rangle\langle j| E_l^* \otimes |k\rangle\langle l|] \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} E_k |i\rangle\langle j| E_l^* \cdot \mathrm{Tr}[|k\rangle\langle l|] \\ &= \sum_{k=1}^{m} E_k |i\rangle\langle j| E_k^* \end{aligned} \tag{36}$$

であるので，$\mathcal{E}$ は Stinespring 表現

$$\mathcal{E}(X_A) = \mathrm{Tr}_E[VX_AV^*] \tag{37}$$

を持つことが示された． □

Lemma 5 (Stinespring 表現 $\Rightarrow$ Kraus 表現) Stinespring 表現を持つ写像は Kraus 表現で表すことができる．

証明： $\mathcal{E}:\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)\to\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ が，環境系 $\mathcal{H}_E$ と等距離作用素 $V:\mathcal{H}_A\to\mathcal{H}_B\otimes\mathcal{H}_E$ を用いて，

$$\mathcal{E}(X_A) = \mathrm{Tr}_E[VX_AV^*] \tag{38}$$

で表せるものとすると，部分トレースの定義より，

$$\mathcal{E}(X_A) = \sum_k (I_B\otimes\langle k|)VX_AV^*(I_B\otimes|k\rangle) \tag{39}$$

と書ける．ここで

$$E_k := (I_B\otimes\langle k|)V \tag{40}$$

とおくと，E_k は $\mathcal{H}_A$ から $\mathcal{H}_B$ への線形作用素で，

$$\mathcal{E}(X_A) = \sum_k E_kX_AE_k^* \tag{41}$$

が成り立つ．また，一方で以下の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\sum_k E_k^*E_k &= \sum_k V^*(I_B\otimes|k\rangle)(I_B\otimes\langle k|)V\\ &= V^*V\\ &= I_A\end{aligned} \tag{42}$$

ただし，最後の等式は (14) を用いた．(41), (42) より $\mathcal{E}$ が Kraus 表現を持つことが示された． □

5 Stinespring 表現と物理的実現

Theorem 2 (量子通信路の物理的表現) 量子通信路 $\mathcal{E}:\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)\to\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ は，

- ある環境系 $\mathcal{H}_E$
- $\mathcal{H}_B$ 上のある純粋状態 $|0_B\rangle\langle 0_B|$
- $\mathcal{H}_E$ 上のある純粋状態 $|0_E\rangle\langle 0_E|$
- $\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B\otimes\mathcal{H}_E$ 上のユニタリ作用素 U

を用いて，

$$\mathcal{E}(X_A) = \mathrm{Tr}_{AE}[U(X_A\otimes|0_B\rangle\langle 0_B|\otimes|0_E\rangle\langle 0_E|)U^*] \tag{43}$$

と表すことができる．逆に，このように表すことができる写像 $\mathcal{E}:\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)\to\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ は量子通信路である．

証明： 量子通信路 $\mathcal{E}$ はある環境系 $\mathcal{H}_E$ と等距離作用素 $V:\mathcal{H}_A\to\mathcal{H}_B\otimes\mathcal{H}_E$ を用いて Stinespring 表現

$$\mathcal{E}(X_A) = \mathrm{Tr}_E[VX_AV^*] \tag{44}$$

で表せる．以下では等距離作用素 $V:\mathcal{H}_A\to\mathcal{H}_B\otimes\mathcal{H}_E$ を用いて $\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B\otimes\mathcal{H}_E$ 上のユニタリ作用素 U を構成する．そのためには $\mathcal{H}_A,\mathcal{H}_B,\mathcal{H}_E$ の正規直交基底をそれぞれ $\{|i\rangle\}_i$，$\{|j\rangle\}_j$，$\{|k\rangle\}_k$ として，$\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B\otimes\mathcal{H}_E$ の正規直交基底 $|i\rangle\otimes|j\rangle\otimes|k\rangle$ の行き先

$$U(|i\rangle\otimes|j\rangle\otimes|k\rangle) \tag{45}$$

が互いに直交し，ノルムが 1 になるように U を定めてやればよい．最初に $j=k=0$ の場合に

$$U(|i\rangle\otimes|0\rangle\otimes|0\rangle) := |0\rangle\otimes V|i\rangle \quad (i=1,\dots,\dim\mathcal{H}_A) \tag{46}$$

と定め，その他の j,k については

$$U(|i\rangle\otimes|j\rangle\otimes|k\rangle) \quad (i=1,\dots,\dim\mathcal{H}_A) \tag{47}$$

を適当に定めることにする．このとき，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_{AE}[U(|i\rangle\langle j|\otimes|0\rangle\langle 0|\otimes|0\rangle\langle 0|)U^*]\\ &= \mathrm{Tr}_{AE}[|0\rangle\langle 0|\otimes V|i\rangle\langle j|V^*]\\ &= \mathrm{Tr}_E[V|i\rangle\langle j|V^*]\\ &= \mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)\end{aligned} \tag{48}$$

が成り立つので，$\mathcal{E}$ が (43) の形で表されることが示された．逆に $\mathcal{E}$ が (43) の形で表されているとき，$\mathcal{H}_{E'}=\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_E$ とおき，$|i\rangle\in\mathcal{H}_A$ に対して

$$V|i\rangle := U(|i\rangle\otimes|0_B\rangle\otimes|0_E\rangle) \tag{49}$$

とおくと，$V:\mathcal{H}_A\to\mathcal{H}_B\otimes\mathcal{H}_{E'}$ は等距離作用素で

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)\\ &= \mathrm{Tr}_{AE}[U(|i\rangle\langle j|\otimes|0_B\rangle\langle 0_B|\otimes|0_E\rangle\langle 0_E|)U^*]\\ &= \mathrm{Tr}_{E'}[V|i\rangle\langle j|V^*]\end{aligned} \tag{50}$$

と書ける．これより，$\mathcal{E}$ が Stinespring 表現

$$\mathcal{E}(X_A) = \mathrm{Tr}_{E'}[VX_AV^*] \tag{51}$$

を持つことが示された． □

Corollary 1 (量子通信路の物理的表現，$\mathcal{H}_A=\mathcal{H}_B$) 同一の系 $\mathcal{H}_A$ から $\mathcal{H}_A$ への量子通信路 $\mathcal{E}$ は，

- ある環境系 $\mathcal{H}_E$

- $\mathcal{H}_E$ 上のある純粋状態 $|0_E\rangle\langle 0_E|$
- $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E$ 上のユニタリ作用素 U

を用いて,

$$\mathcal{E}(X_A) = \mathrm{Tr}_E[U(X_A \otimes |0_E\rangle\langle 0_E|)U^*] \tag{52}$$

と表すことができる．逆に，この様に表すことができる写像 $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ は量子通信路である．

証明： 前定理と全く同様. □