量子情報科学ウィンタースクール
エンタングルメントの基礎

小川朋宏

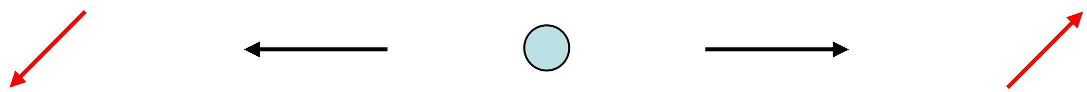
電気通信大学 大学院情報システム学研究科

2010 年 2 月 26 日

エンタングルメント (量子もつれ)

Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) の思考実験 (1935)

$\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^2$ $\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2$



原子：一対の光子生成，角運動量保存

$$|\,\Psi^+\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,01\,\rangle + |\,10\,\rangle) \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

射影公理

A : |0>, |1> 基底で測定

p=1/2 測定結果 0 : $|\,\Psi^+\,\rangle \longrightarrow |\,01\,\rangle$

p=1/2 測定結果 1 : $|\,\Psi^+\,\rangle \longrightarrow |\,10\,\rangle$

○ Aの測定結果にしたがって，Bの状態が瞬時に変化

歴史：Bell の不等式とエンタングルメント

○ EPR :「実在の局所性」を要請

⇒ 量子力学は不完全であると主張

○ Bell の不等式 (1964)

・「実在の局所性」(≒隠れた変数の理論)
　から導かれる実験的に検証可能な不等式

○ Aspect et al. による実験 (1982)

・Bell の不等式は不成立

・「実在の局所性」ではなく，量子力学を支持

パラダイムシフト

エンタングルメントを積極的に利用

Bell 基底

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \qquad |01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \qquad |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle)$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \qquad |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \qquad |11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle)$$

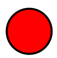
$$\longleftrightarrow$$

ユニタリ変換

$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 上の正規直交基底をなす

量子テレポーテーション (Bennett et. al, 1993)

$\boxed{\mathcal{H} = \mathbb{C}^2}$ $\boxed{\text{Alice : } \mathcal{H}_A = \mathbb{C}^2}$ $\boxed{\text{Bob : } \mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2}$



未知の量子状態
(測定すると壊れる)

$|\,\psi\,\rangle = \alpha|\,0\,\rangle + \beta|\,1\,\rangle$

$(|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1)$

$$|\,\Phi^+\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,00\,\rangle + |\,11\,\rangle)$$

エンタングルメント共有

Alice : $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_A$ をベル基底で測定

測定結果を通信 $\Longrightarrow$

Bob : 測定結果に応じて
ユニタリ変換

$|\,\psi\,\rangle = \alpha|\,0\,\rangle + \beta|\,1\,\rangle$ を復元

二準位系のユニタリ変換

$$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

bit flip $X = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ phase flip $Z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

$$X|0\rangle = |1\rangle \qquad Z|0\rangle = |0\rangle$$

$$X|1\rangle = |0\rangle \qquad Z|1\rangle = -|1\rangle$$

$$|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle = \frac{1}{2}\Big\{|\Phi^+\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |\Phi^-\rangle \otimes (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)$$
$$+ |\Psi^+\rangle \otimes (\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |\Psi^-\rangle \otimes (-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)\Big\}$$

Alice 測定結果

$\Phi^+ \Longrightarrow I$ (恒等変換)

$\Phi^- \Longrightarrow Z$

$\Psi^+ \Longrightarrow X$

$\Psi^- \Longrightarrow ZX$

Bob : $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ を復元

量子高密度符号化のためのユニタリ変換

$$|\,\Phi^+\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,00\,\rangle + |\,11\,\rangle)$$

$$\xrightarrow{X \otimes I} \quad |\,\Psi^+\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,01\,\rangle + |\,10\,\rangle)$$

$$\xrightarrow{ZX \otimes I} \quad |\,\Psi^-\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,01\,\rangle - |\,10\,\rangle)$$

$$\xrightarrow{I \otimes I} \quad |\,\Phi^+\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,00\,\rangle + |\,11\,\rangle)$$

$$\xrightarrow{Z \otimes I} \quad |\,\Phi^-\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,00\,\rangle - |\,11\,\rangle)$$

量子高密度符号化 dense coding (Bennett-Wiesner, 1992)

Alice : $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^2$

Bob : $\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2$

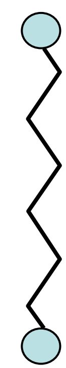
エンタングルメント共有 $|\,\Phi^+\,\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\,00\,\rangle + |\,11\,\rangle)$

Alice : ユニタリ変換 ⇒ 粒子を送信

Bob : Bell基底で測定

メッセージ

1	$X \otimes I$	$\longrightarrow$	$\lvert\,\Psi^+\,\rangle$
2	$ZX \otimes I$	$\longrightarrow$	$\lvert\,\Psi^-\,\rangle$
3	$I \otimes I$	$\longrightarrow$	$\lvert\,\Phi^+\,\rangle$
4	$Z \otimes I$	$\longrightarrow$	$\lvert\,\Phi^-\,\rangle$



○ 一回の粒子の送信で 2 bit のメッセージ伝達