量子情報科学
ウィンタースクール2010

2010.2.25-27

1日目: 量子力学の基礎

2日目: 量子情報理論の基礎I

3日目: 量子情報理論の基礎Iと応用

木村元（産業技術総合研究所 情報セキュリティ研究センター）

量子力学とは

- 量子力学とは、

  原子、素粒子などの微視的*な物理学を記述する基礎理論
  （ただし、非相対論的、有限自由度 ⇒ 場の量子論、相対論的量子力学は含まない）

  $\hbar \simeq 6.626 \times 10^{-34} J \cdot s$: Plank 定数 (本講義では以降 $\hbar = 1$)

- 自然現象の説明

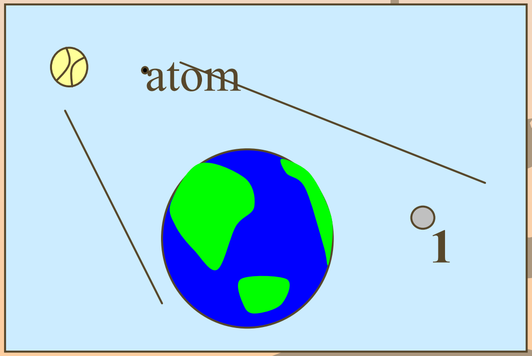
  古典物理学では説明のつかない現象を驚くべき精度で説明

- 量子力学の数学的枠組み

  ほぼ完成 ⇒ von Neumannの公理系が有名

- 解釈問題、観測問題、

  理論の解釈や観測問題は，未だ統一的意見が存在しない



量子力学の公理I

- 任意の量子力学系にはHilbert空間$\mathcal{H}$が対応し，状態は$\mathcal{H}$の単位ベクトル$|\psi>$で表現される
- 任意の物理量は$\mathcal{H}$上のエルミート演算子Aで表現される

Bornの確率規則

状態が$|\psi>$のとき物理量Aを測定すると，Aの固有値の一つが確率的に測定され，　固有値aを測定する確率は

$$\Pr\{a \mid A, |\psi\rangle\} = \langle\psi|P_a|\psi\rangle$$

で与えられる．ただし，Pa はAの固有値aに対応するスペクトル射影演算子

$A = \sum_a aP_a$　（スペクトル分解）

- **有限準位量子力学系 ⇔ 対応するHilbert空間の次元が有限**

  - d 準位系 $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^d$
  - 2 準位系 （スピン 1/2 系，量子ビット） $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^2$

    $|0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると，

    任意の量子ビット状態は

    $$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1)$$

- **(全体の)位相因子のみ異なる状態は同一視:**

$$|\psi\rangle \simeq e^{i\theta}|\psi\rangle \ (\theta \in \mathbb{R})$$

(すなわち，量子状態はHilbert空間の射(ray)によって表現される)

（例） $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq |\psi'\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(物理量の例) Pauli 行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- σ_i $(i = x, y, z)$ はエルミート
- σ_i はユニタリー　($X = \sigma_x$ などと書くことが多い)
- $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k$, $[\sigma_i, \sigma_j]_+ = 2\delta_{ij}$.
- 任意の 2×2 エルミート行列 A は $\{\mathbb{I}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ で展開できる：

$$A = \alpha_0\,\mathbb{I} + \alpha_x\sigma_x + \alpha_y\sigma_y + \alpha_z\sigma_z\ (\alpha_i \in \mathbb{R})$$

- σ_i の固有値は ± 1
- $Z = \sigma_z$ の固有値 $1, -1$ の固有状態 $|0\rangle := (1, 0)^T, |1\rangle := (0, 1)^T$
- $X = \sigma_x$ の固有値 $1, -1$ の固有状態 $|+\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T, |-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$
- $X|0\rangle = |1\rangle, X|1\rangle = |0\rangle$（ビット反転）, $Z|0\rangle = |0\rangle, Z|1\rangle = -|1\rangle$（位相反転）

- **理論の整合性について**:

1 測定される値は実数値 $\Leftarrow$ エルミート演算子の固有値は実数

2 Born の規則は確率の公理を満たす $\Leftarrow$ エルミート演算子の完全性 $\sum_a P_a = \mathbb{I}$

- **重ね合わせの原理** $\Leftrightarrow$ **異なる状態のベクトル和は新しい状態を生じる**

1 $|0\rangle = |on\rangle, |1\rangle = |off\rangle \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$?

2 Schrödinger の猫 : $|0\rangle =$ , $|1\rangle =$  $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$?

- **公理は，任意の単位ベクトル，または，任意のエルミート演算子が状態，物理量として実現可能と主張するわけではない！**

しかし 本講義（及び，量子情報科学のたいていの場合）では任意の単位ベクトル，および，エルミート演算子が実現可能と仮定する.

非縮退物理量の測定と確率振幅

(1) $A|\phi_i\rangle = a_i|\phi_i\rangle$ $(i=1,\ldots,d, ||\phi_i||=1) \Rightarrow P_i = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$

(2) $\boxed{\Pr\{a_i \mid A, |\psi\rangle\} = |\langle\phi_i|\psi\rangle|^2 \text{ Born の確率規則}}$

(3) 他方，$\{|\phi_i\rangle\}$ は正規直交基底なので，任意の状態 $|\psi\rangle$ は
$|\psi\rangle = \alpha_1|\phi_1\rangle + \alpha_2|\phi_2\rangle + \cdots + \alpha_d|\phi_d\rangle$ ただし，$\alpha_i = \langle\phi_i|\psi\rangle$ $(i=1,\ldots,d)$ と書ける

(4) $\langle\phi_i|\psi\rangle$ を（物理量 A の）確率振幅と呼ぶ.

基底による測定

$\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^d$ 正規直交基底 による測定：

『状態 $|\psi\rangle$ の下で基底 $|\phi_i\rangle_{i=1}^d$ の測定をすると，i 番目の測定値を得る確率は

$$\Pr\{i \mid \{\phi_i\}, |\psi\rangle\} = |\langle\phi_i|\psi\rangle|^2$$

（実数値 $a_1,\ldots,a_d$ を考え，物理量 $A=\sum_i a_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ を想定している！）』

すなわち，状態 $|\psi\rangle = \alpha_1|\phi_1\rangle + \alpha_2|\phi_2\rangle + \cdots + \alpha_d|\phi_d\rangle$ の下，基底 $\{\phi_i\}$ の測定を行った場合 i 番目の測定値を得る確率は，$|\alpha_i|^2$.

（例） 状態 $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ の下，物理量 σ_z を測定するとき，固有値 $\pm$ を得る確率を求めよ．

（解）$|0\rangle = (1,0)^T$ $|1\rangle = (0,1)^T$ は σ_z の固有値 $+1, -1$ に属する（規格化された）固有ベクトルであることに注意．
状態 $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ なので，$+1$ を得る確率は，$(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2}$, -1 を得る確率は，$(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2}$.

（例） 状態 $|\psi\rangle = (\alpha, \beta)^T$ の下，物理量 σ_z を測定するとき，固有値 $\pm$ を得る確率を求めよ．

（解）状態 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ なので，$+1$ を得る確率は，$|\alpha|^2$, -1 を得る確率は，$|\beta|^2$.

（例） 状態 $|0\rangle = (0,1)$ の下，物理量 $\sigma_x + \sigma_z$ を測定するとき，得られる測定値と確率を求めよ．

期待値と標準偏差

- 期待値：$E[A]_\psi = \langle\psi|A|\psi\rangle$
- 標準偏差（$\sqrt{\ }$分散）：$(\Delta A_\psi)^2 = \langle\psi|A^2|\psi\rangle - (\langle\psi|A|\psi\rangle)^2$

不確定性関係（Heisenberg-Robertson）

Δ_A, Δ_B を状態 $|\psi\rangle$ の下での物理量 A, B の標準偏差とすると，

$$\Delta_A \Delta_B \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle|$$

（例） 状態 $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ の下，物理量 σ_z を測定するとき，期待値，分散を求めよ

（解） 前問より，期待値 0, 分散 $\cancel{0}$（のはず）．

$$E[\sigma_z]_\psi = \langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Delta\sigma_{z\,\psi} = \langle\psi|\sigma_z^2|\psi\rangle - E[\sigma_z]_\psi^2 = \cdots$$

物理量の関数 $\left(A = \sum_a aP_a \Rightarrow f(A) := \sum_a f(a)P_a\right)$

A を物理量，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を実関数とするとき，

『物理量 $f(A)$ の測定』 $\simeq$ 『A を測定して測定値 a が得られたとき $f(a)$ を与える測定』

Based on『物理量AとBの同一視≒任意の状態でAとBの物理的性質が等しい』

可換な物理量の同時測定

物理量 $A=\sum_i a_i P_i^A, B=\sum_j b_j P_j^B$ が可換（$[A,B]:=AB-BA=0$）なとき，
A,B を同時測定することができ，同時確率分布は

$$\Pr\{a_i, b_j \mid A, B, |\psi\rangle\} = \langle\psi|P_i^A P_j^B|\psi\rangle$$

物理量の和

A,B を物理量とするとき，$A+B$ は物理量：

- 可換（$[A,B]=0$）『$A+B$ の測定』 $\simeq$ 『A,B の測定をして，測定値 a と b の和を与える』
- 非可換 （$[A,B]\neq 0$） 『$A+B$ の測定』 $\neq$ 『A,B の測定をして，測定値 a と b の和を与える』
  （一般に非可換な物理量は同時測定不可能!）

固有状態と確定的状態

- 物理量 A の（規格化された）固有ベクトルを固有状態と呼ぶ
- 固有状態 $\Leftrightarrow$ 確定的状態　（ある測定値を得る確率が 1）

測定過程（反復仮説と射影測定）

- 一般に測定後の状態は変化する！(測定行為による不可避な擾乱)
- [反復仮説] 物理量 A を測定して測定値 a を得た直後に，A を測定するならば，確率 1 で同じ値 a が測定される．
- 非縮退物理量 $A = \sum_i a_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ の測定が反復仮説を満たすならば，
  状態 $|\psi\rangle$ の下で A を測定して，固有値 a_i が得られたならば，状態は $|\phi_i\rangle$ に変化する！
  (反復仮説 $\Rightarrow$ von Neumann の射影測定)

(例) 状態 $|\psi\rangle = (\alpha, \beta)^T$ の下，物理量 σ_z を射影測定するとき，測定値が 1 ならば測定後の状態は $|0\rangle$ になり，測定値が -1 ならば，測定後の状態は $|1\rangle$ になる

量子力学の公理II

- 孤立量子系は，Schrödinger方程式に従い発展する:

$$i\frac{d}{dt}|\psi_t\rangle = H|\psi_t\rangle$$

ただし，**H**はハミルトニアン演算子（≒ エネルギー）

$$\Leftrightarrow \ |\psi_t\rangle = U_t|\psi_0\rangle \ (U_t = \exp(-iHt))$$

- U_t: 時間発展演算子: ユニタリー演算子
- $\{U_t\}_t$: 1 パラメータ（強連続）ユニタリー群

量子力学の公理III

- 量子系AとBの合成系A+Bにはテンソル積Hilbert空間 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ が対応する.

$\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ は A 系，B 系に対応する Hilbert 空間

A系の物理量がエルミート作用素O_A

＝＞ 合成系A+Bではエルミート作用素 $O_A \otimes \mathbb{I}_B$

（B系の物理量も同様）

- **理論の整合性**

  - 任意の時刻での確率解釈 $\Leftarrow$ 時間発展演算子のユニタリー性

- **Schrödinger表示とHeisenberg表示 (略)**

$$A \leftrightarrow A_t := U_t A U_t^\dagger$$

合成系の基底

$\mathcal{H}_A \simeq \mathbb{C}^n$ の基底を $|\phi_i\rangle_{i=1}^n$, $\mathcal{H}_B \simeq \mathbb{C}^m$ の基底を $|\psi_i\rangle_{i=1}^m$ とすると，$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ の基底は $\{|\phi_i\rangle \otimes |\psi_j\rangle\}_{i,j}$．特に，$\dim \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_B = nm$

セパラブル状態とエンタングルド状態 (小川さんの講義)

- $|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\xi\rangle$: セパラブル状態
  (ただし，$|\phi\rangle, |\xi\rangle$ を $\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_B$ の状態)
- $|\psi\rangle \neq |\phi\rangle \otimes |\xi\rangle$: エンタングルド状態

各系の物理量の同時測定

A 系の物理量 $O_A = \sum_i a_i P_i^A$ と B 系の物理量 $O_B = \sum_j b_j P_j^B$ は同時測定可能:
実際，$[O_A \otimes \mathbb{I}_B, \mathbb{I}_A \otimes O_B] = 0$ （可換）より，同時確率分布は
$\Pr(i, j | O_A, O_B, |\psi\rangle) = \langle \Psi | P_i^A \otimes P_j^B | \psi \rangle$

- 多体系A,B,C･･･Xの合成系:　$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_X$

$|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle = |0110\rangle$ Dirac 表記法のメリット

- 実在値(隠れた変数?)

＊Kochen-Speckerの定理=> 文脈非依存な隠れた変数理論の否定

＊Bellの不等式 => 局所隠れた変数理論の否定

測定行為とは独立に物理量の(実在)値を考えるのは難しい！！

- 測定とは？

古典物理学 = 実在値を確認する作業

量子物理学 $\neq$ 実在値を確認する作業