たかが学問，されど学問

――情報理論に魅せられて――

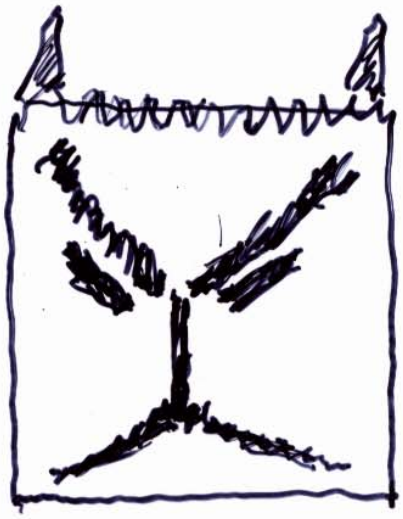
IS 最終講義，鶴太舞

2007/3/2

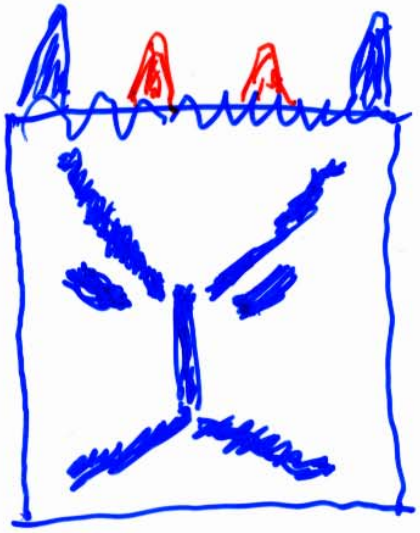
1. わが学問の師

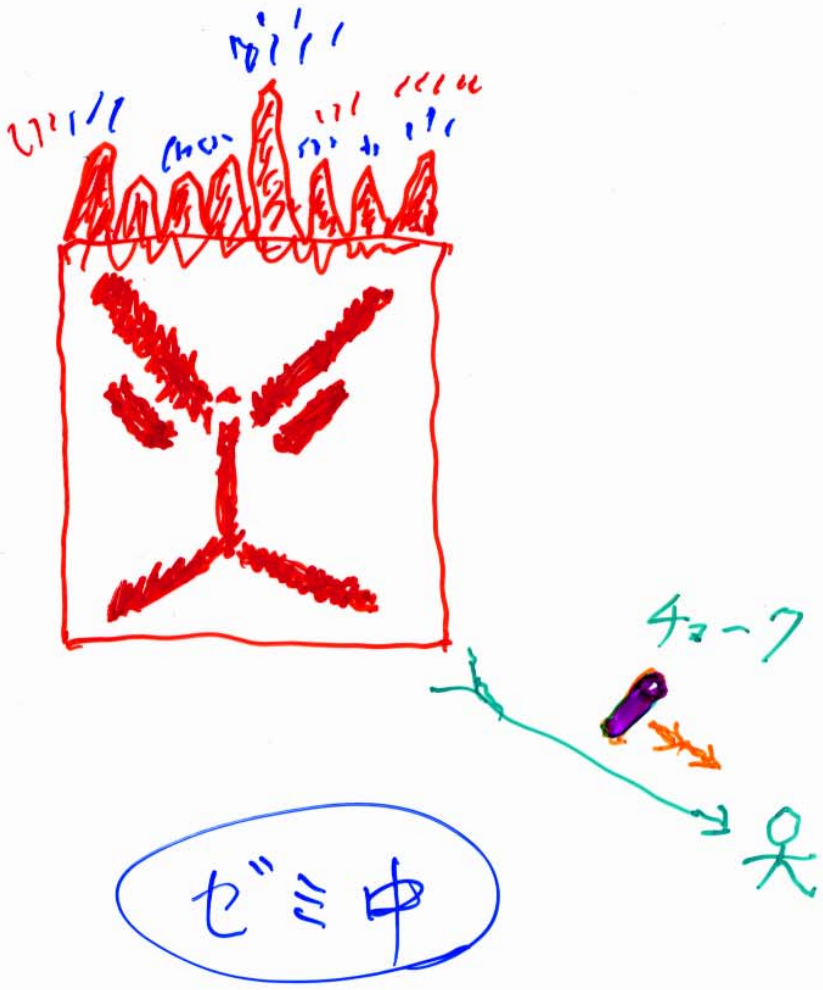
近藤一夫先生










ケーク
セミ中



A. 大学院生に対する訓辞

- 大学院に入ったら，
  学生も教員も研究者として対等
- 他の研究者が出来るものはテーマにするな
- 自分でテーマを見つけられなければ
  研究者と呼ばない．

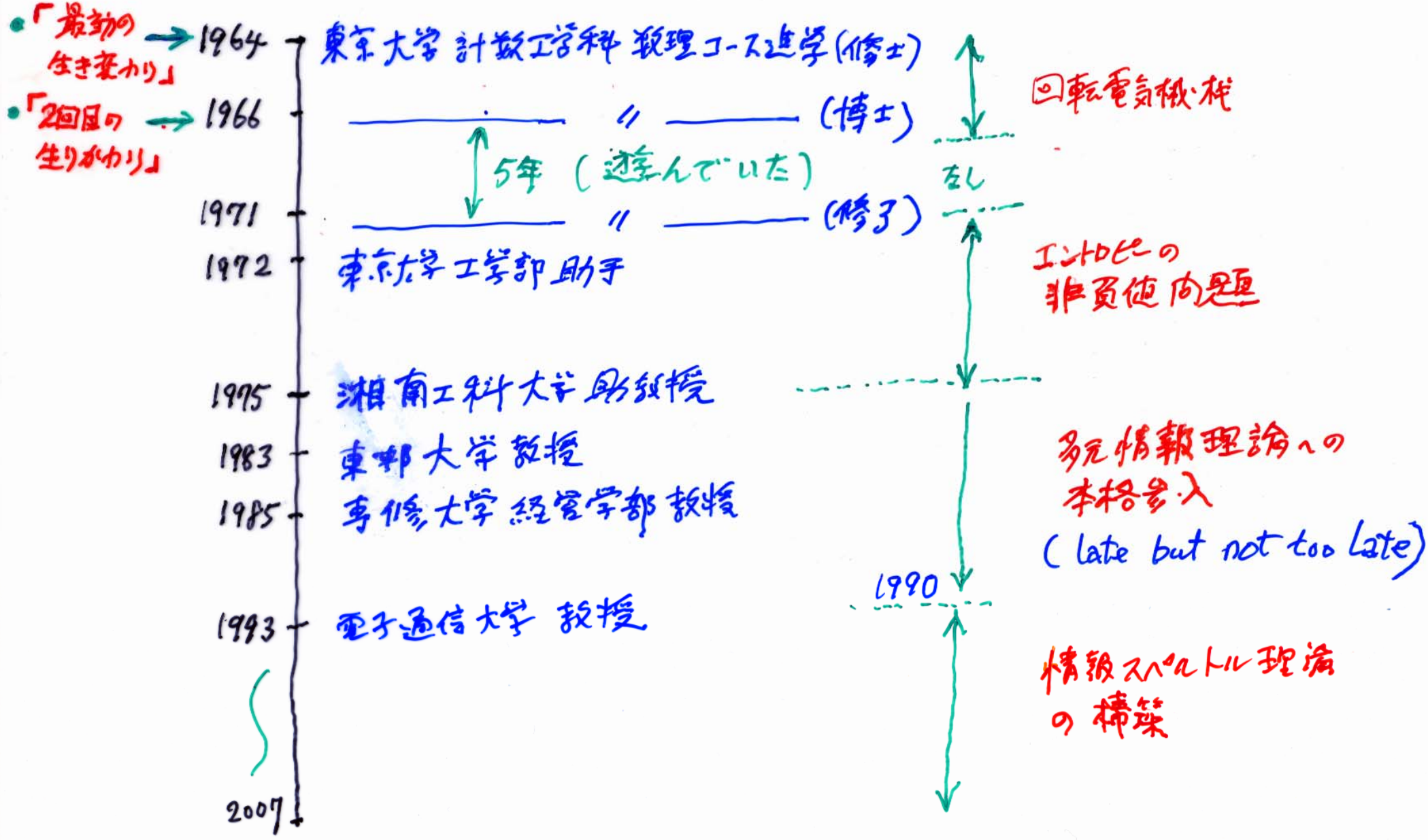
B. 四戒

- 金をもらうな
- 結婚するな
- 本を書くな
- 既製の学会と関係するな

C. 研究者は放屁を律することが
出来なければならない!!

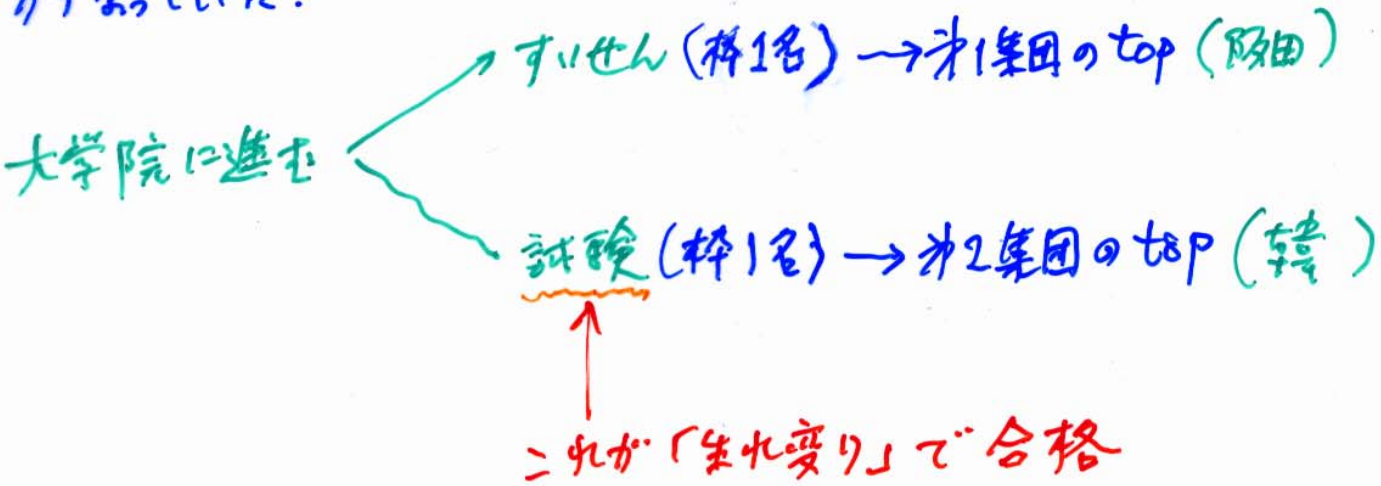


2. 渡り鳥歴


「最初の生き変わり」
「2回目の生りかわり」
1964
東京大学 計数工学科 数理コース進学(修士)
1966
〃 (博士)
5年(遊んでいた)
1971
〃 (修了)
1972
東京大学工学部助手
1975
湘南工科大学助教授
1983
東邦大学教授
1985
専修大学 経営学部教授
1993
電子通信大学 教授
2007
回転電気機械
なし
エントロピーの非負値問題
多元情報理論への本格参入
(late but not too late)
1990
情報スペクトル理論の構築

● 大学院に進学できた理由

当時，数理工学コースの学生は8名，
成績で言えば，第1集団(7名)と第2集団(1名)
からなっていた．



3. 研究歷（前情報理論）

修士 ⇒ 回転電気機械

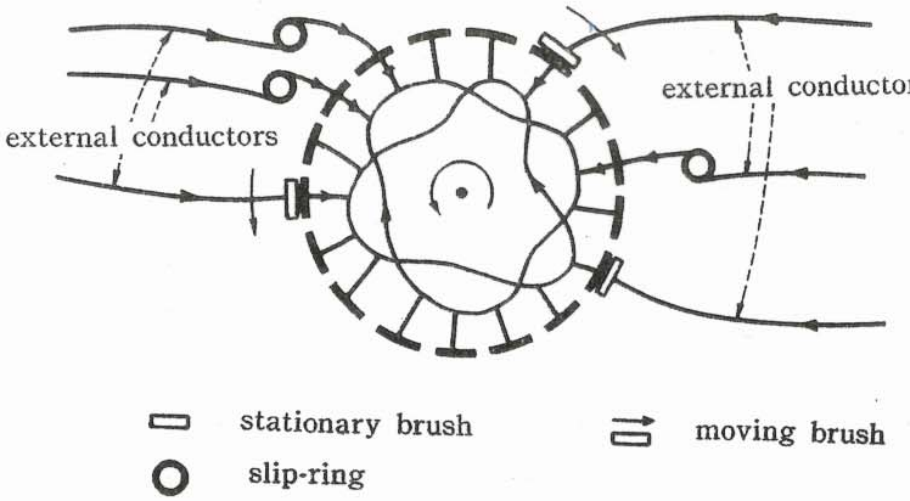
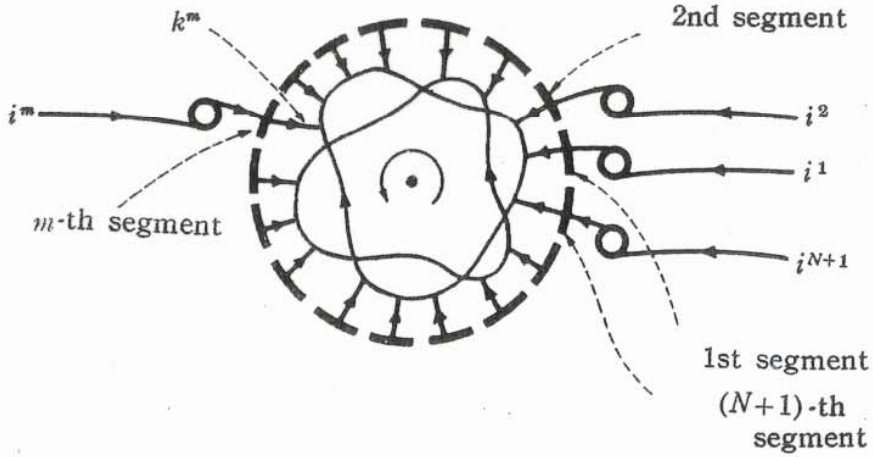


FIG. 2



Kronの思想

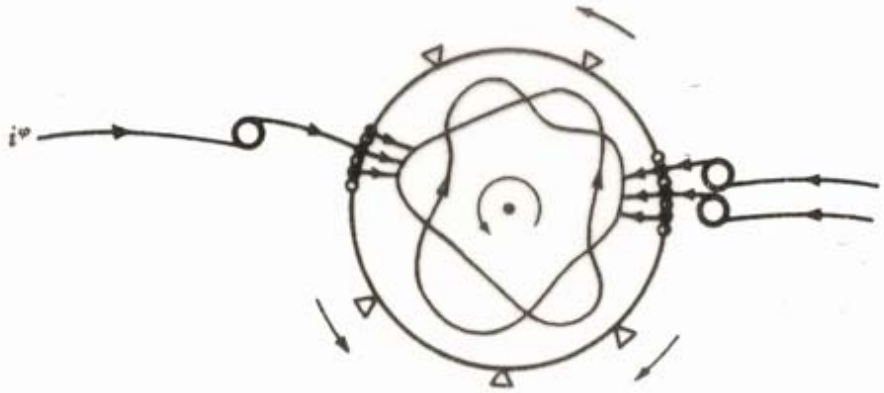
交流機械

直流機械

3相機械 etc.

は座標変換で結ばれた同一の機械に過ぎない.

理論化 ⟹ 連続な整流子 (2)



- infinitesimal insulator
- infinitesimal segment
- brush
- slip-ring

統一運動方程式

機構系と電気系を統合したもの.

接続係数

$$g_{pg}\frac{di^g}{dt} + \Gamma^p_{gs} i^g i^g + r_{pg} i^g = e_p$$

聴覚空間の情報理論的射影幾何学的研究

博士

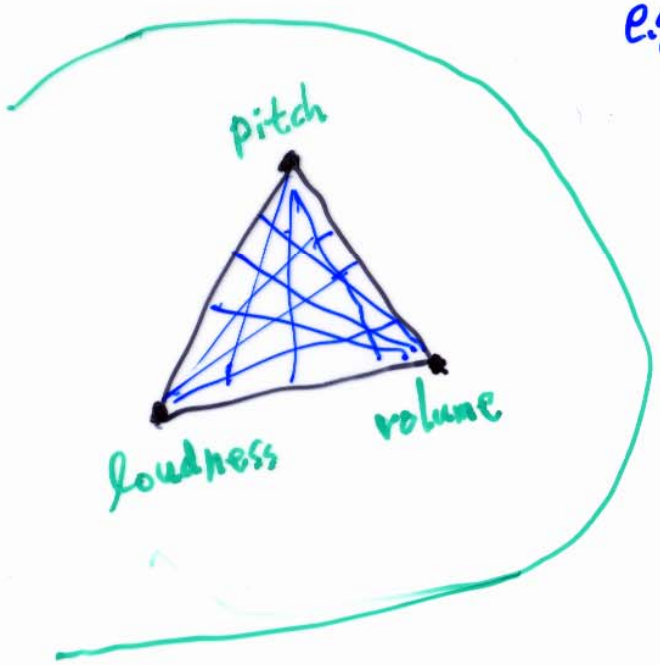
- 聴覚として代表的なのは、pitch, loudness, volume,
  (他にも、brightness, etc)

⇒ ● これらの感覚はそもそも計量可能なのか？

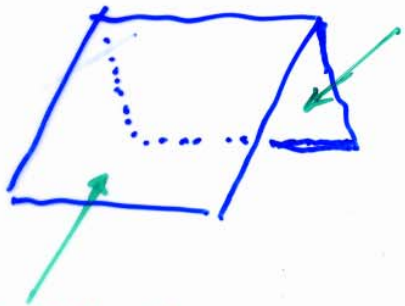
e.g. Weber-Fechner の法則, Stevens の法則 etc
計量可能であることを示すための膨大な実験
が行なわれて来た.

⇓

適切に限定された状況では、計量可能！



結論1 組（pitch, loudness, volume）は 2次元の射影空間をなす（正確には，2つの2次元射影空間を貼り付けたもの）



射影空間
（≒音楽，言語）

射影空間
（≒ノイズ）

（Mathematical Psychology などの話題）

この論文は Biological Cybernetics に投稿して 2回目で accept された．

（70通におよぶ reprints 請求）

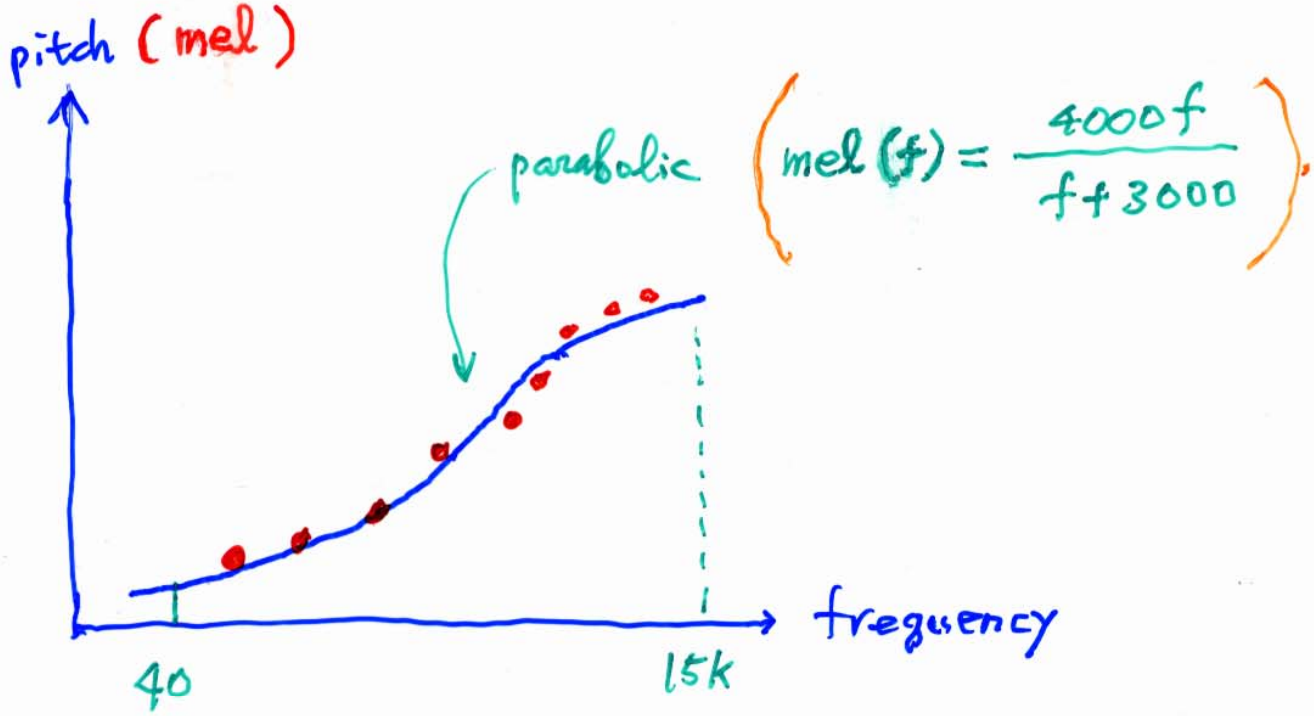
→ { いいことか / 悪いことか }

結論2. 物理的刺激 x に対する感覚量 y は
射影変換の log で表わされる（※1次近似）：

$$y = c \cdot \log\left(\frac{x-\alpha}{x-\bar{\alpha}} \Big/ \frac{x_0-\alpha}{x_0-\bar{\alpha}}\right)$$

← 複比

- 射影変換は次の3つの型に分かれる
  1) Elliptic type
  2) Parabolic type $\xrightarrow{\text{退化}}$ $y = \frac{a}{x+c} + b$
  3) Hyperbolic type


pitch (mel)
parabolic
$\left(mel(f) = \frac{4000f}{f+3000}\right)$
frequency
40
15k

エントロピー関数の非負値問題

助手 →

- 点のエントロピー $h(Z) = -\sum_x P_Z(x) \log P_Z(x)$
- 相関のある3確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$
- エントロピー（周辺） $h(X_S)$ $X_S = (X_i)_{i \in S}$ ← 周辺分布
- 線形エントロピー $h_c = \sum_S c_S h(X_S)$ ← 係数

例： $h_c = h(X_1) + h(X_2) - h(X_1, X_2)$

$h_c = h(X_1) + h(X_2) + h(X_3) - h(X_1 X_2 X_3)$

問題 $h_C \geq 0$ (for any $X_1, X_2, \cdots X_n$) となる
必要十分条件を係数 $(c_S)_{S \subset \{1,2,\cdots,n\}}$
を用いて表わせ.

→ h_C が対称のとき解決
(Han, 1975)

→ h_C が非対称のときは
未解決だったが, 最近解決の
糸口が見つかっている (Yeung 1995 ?)
↑
20年ぶり

非負 $h_C \geq 0$
⇓
$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の間の
一つの相関関係を
定める

ex. $h_C = h(X_1) + h(X_2) - h(X_1, X_2)$
のとき,
$h_C = 0 \iff h_C > 0$
相関なし　　相関あり

Nonnegative Entropy Measures of
Multivariate Symmetric Correlations
(Information and Control, HAN, 1975)

↓

出版より30年後にreprints請求が続く
(それまでは見向きもされなかった!!)

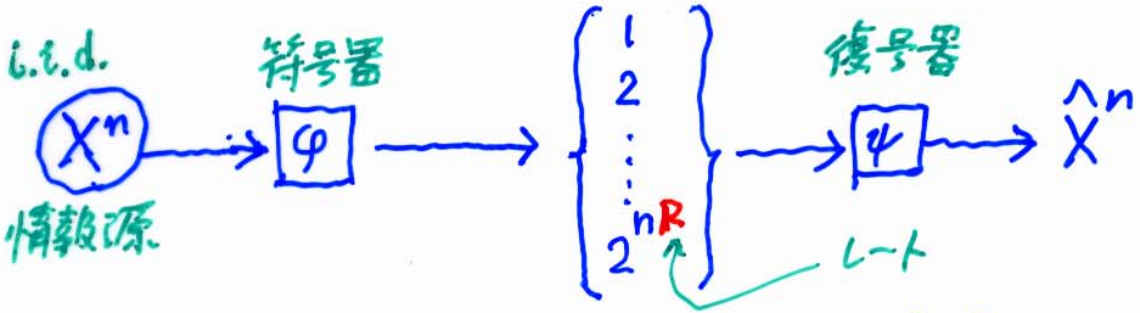
↓

新しい情報理論的統計相関分析の可能性
(e.g. 局所的相関と大局的相関)

4. 研究歴（情報理論基礎）

Shannonの第1定理 (1948) ← 天才的洞察による

情報源符号化



- 誤り確率 $\equiv \Pr\{X^n \neq \hat{X}^n\} \to 0 \quad (n \to \infty)$
- レート $\equiv R$ (fixed) $\to$ min

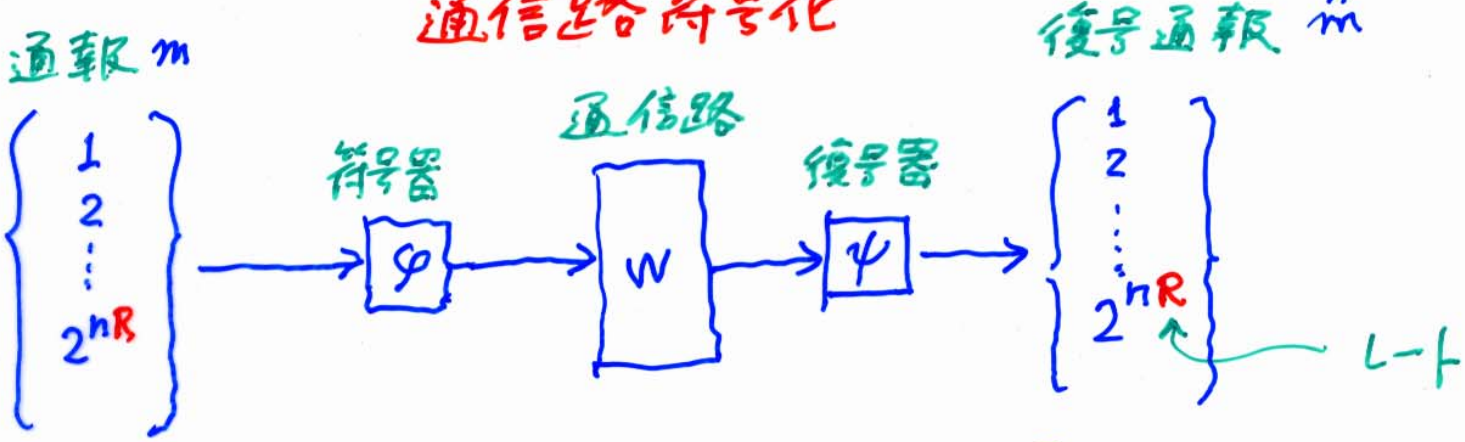
Theorem

$$R_{min} = H(X)$$

最小の許容レート　　エントロピー・レート

Shannonの第2定理 (1948) ← 天才的洞察による

通信路符号化



- 誤り確率 $\equiv P_r\{m \neq \hat{m}\} \to 0 \quad (n \to \infty)$
- レート R (fixed) → max

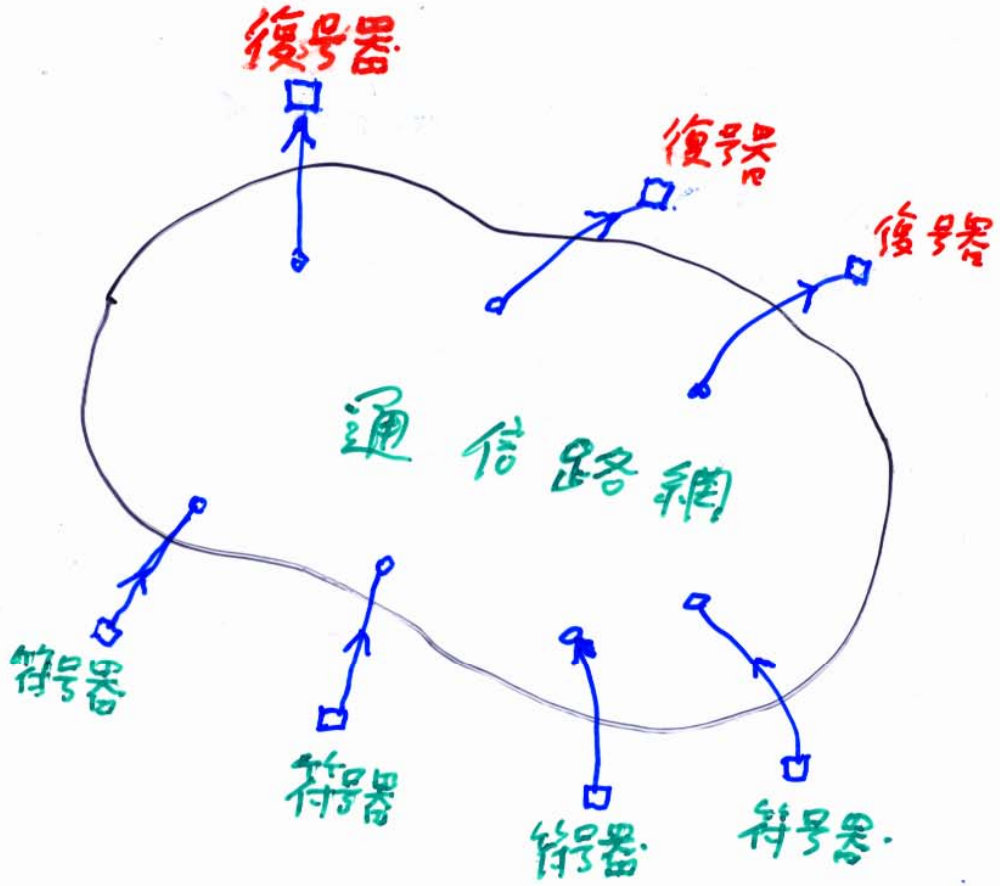
Theorem

$$C = \max_P I(P, W)$$

C: 通信路容量　　$I(P, W)$: 相互情報量

5. 研究歴（多端子情報理論）

●一般の数理モデル



一般の場合は極めて難しい

↓

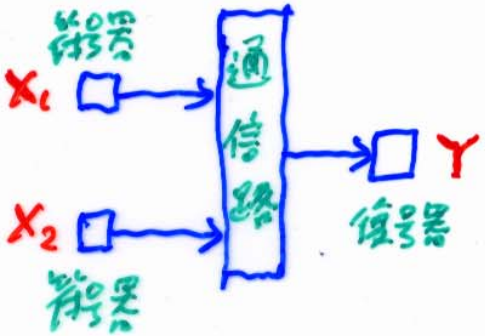
典型的で簡単なモデルを考える

（理論研究の常とう手段）

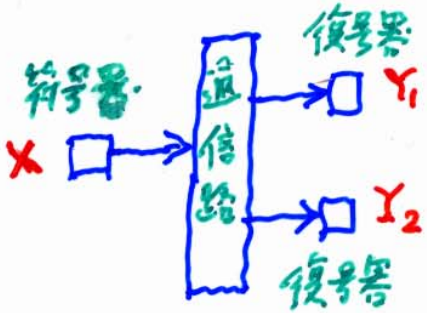
↓

それでも難かしい！

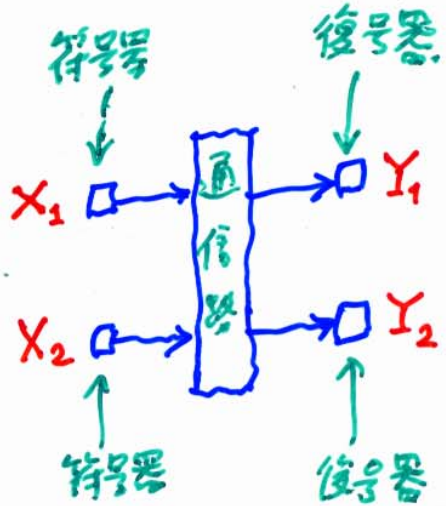
Multiple-Access Channel

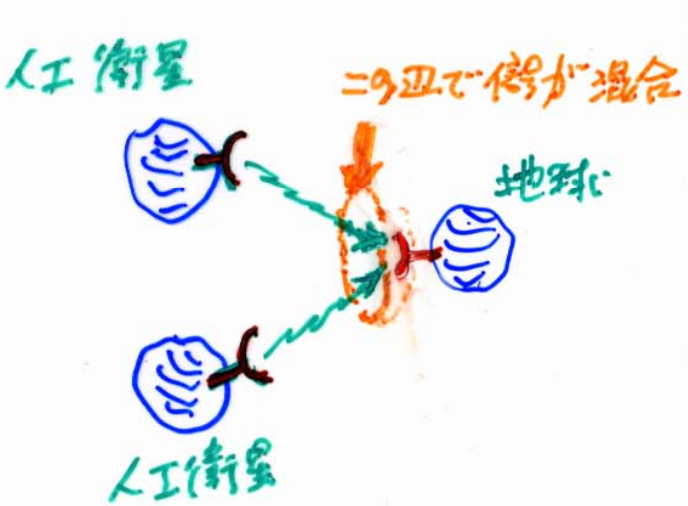


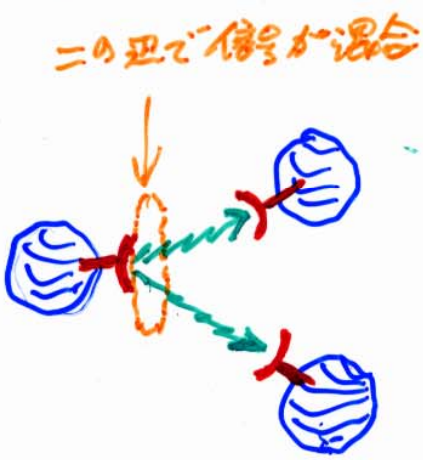
Broadcast Channel

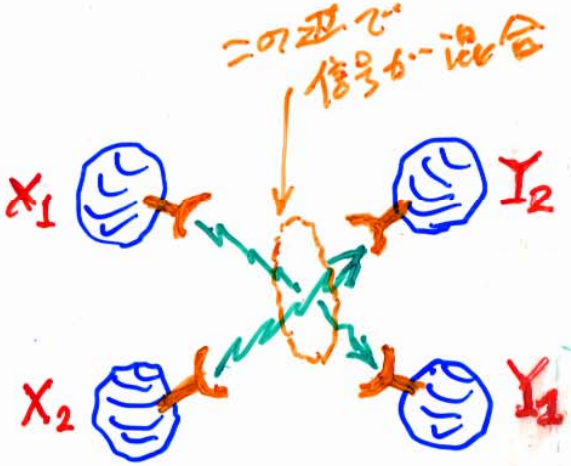


Interference Channel







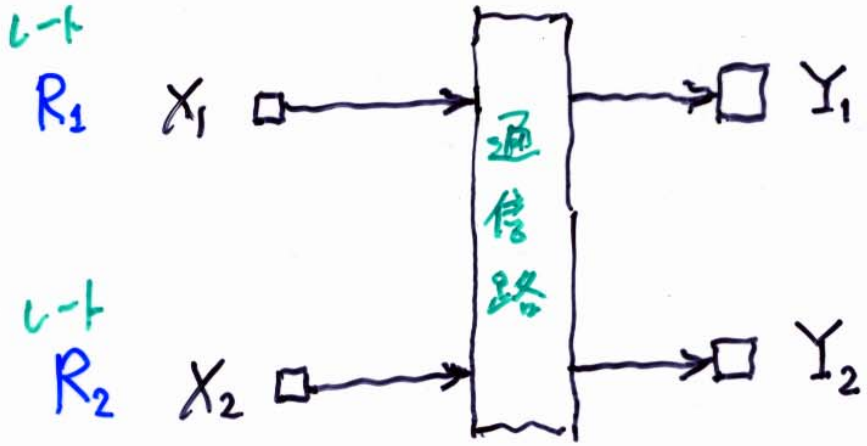


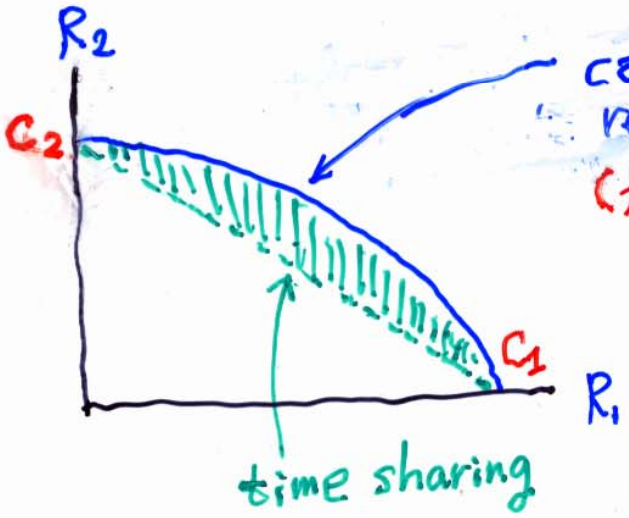
- TDM や FDM では及ばない領域

たとえば，

6. 研究歴（干渉型通信路）

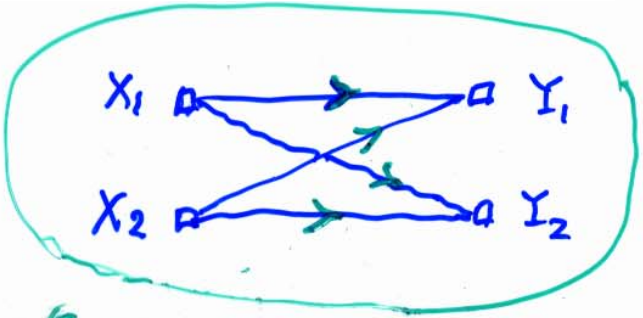
Interference channel





capacity region
(最も広い inner bound)
← Han-Kobayashi, 1981

ガウス干渉通信路



出力　　入力　　ノイズ

$$Y_1 = X_1 + \sqrt{a_{12}}\, X_2 + N_1$$

$$Y_2 = X_2 + \sqrt{a_{21}}\, X_1 + N_2$$

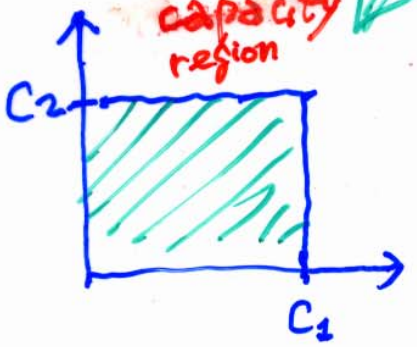
ノイズ電力 $n_1 = n_2 = 1$

信号電力 P_1, P_2

たとえば、

- $a_{12} \geq 1 + P_1$, $a_{21} \geq 1 + P_2$ (強い干渉) のとき:

(Carleial, 1975)



干渉＝0の場合と同じ

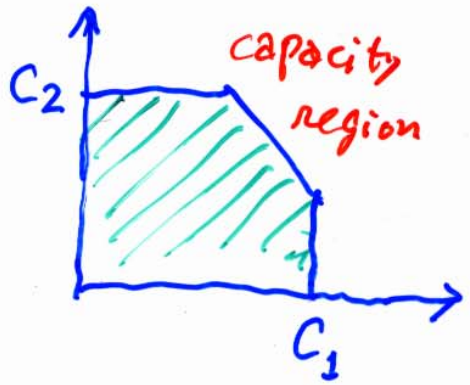
1975 $\xrightarrow{25年}$ 最近の5,6年

⇒ この結果は実際の通信問題に多大の影響を与えた ⇒ cancellation

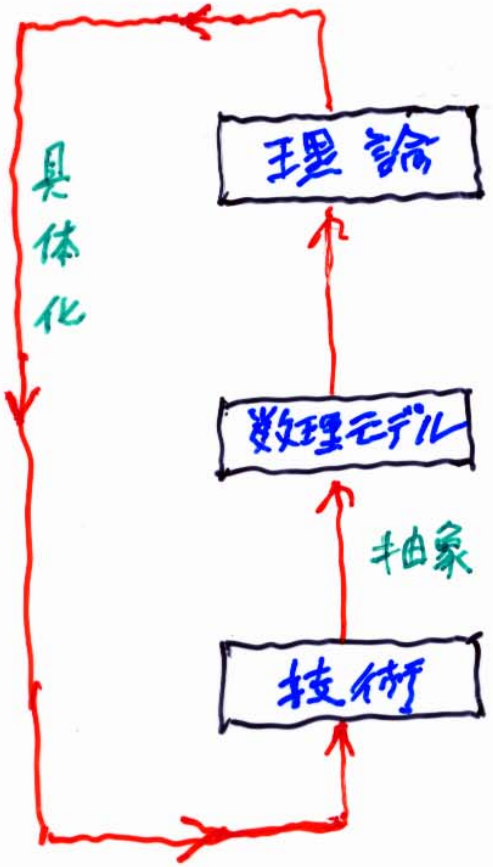
たとえば

$a_{12} \geq 1$, $a_{21} \geq 1$ (やや強い干渉)のとき

(Han-Kobayashi, 1981)



7. 工学としての情報理論



進化
最適な符号化

AGWN通信路
エルゴード情報源

衛星向通信
データ圧縮

進化
非ユークリッド幾何
(1800年)

ユークリッド幾何
(BC300年)

点，線，直線，角度

ナイル川のはんらん
による土地測量

- 理論を伴なわない実践は盲目であり，実践につながらない理論は迂遠する．
- 理論は時には実践を一挙に凌駕するはるか彼方の地平に我々を首地させる．

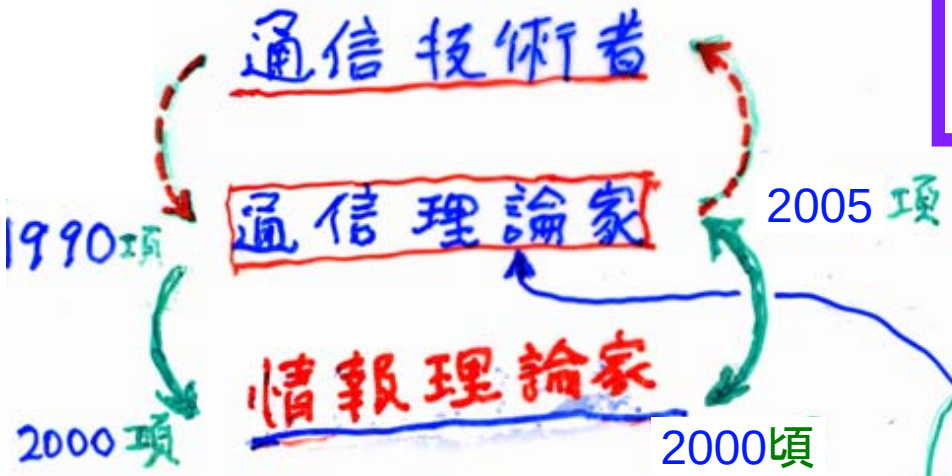
(たとえば)

1960年代の情報理論について(理論と実際)

60年代は画期的発見の時期であるというより,
むしろ,数多くの地道な前進の時代であった.
そして,正しくこの時代に,工学的・技術的直感
のみを持ってしては到底実現し得ない実際的
応用が生み出されたのである(Viterbi)

● 通信理論と情報理論

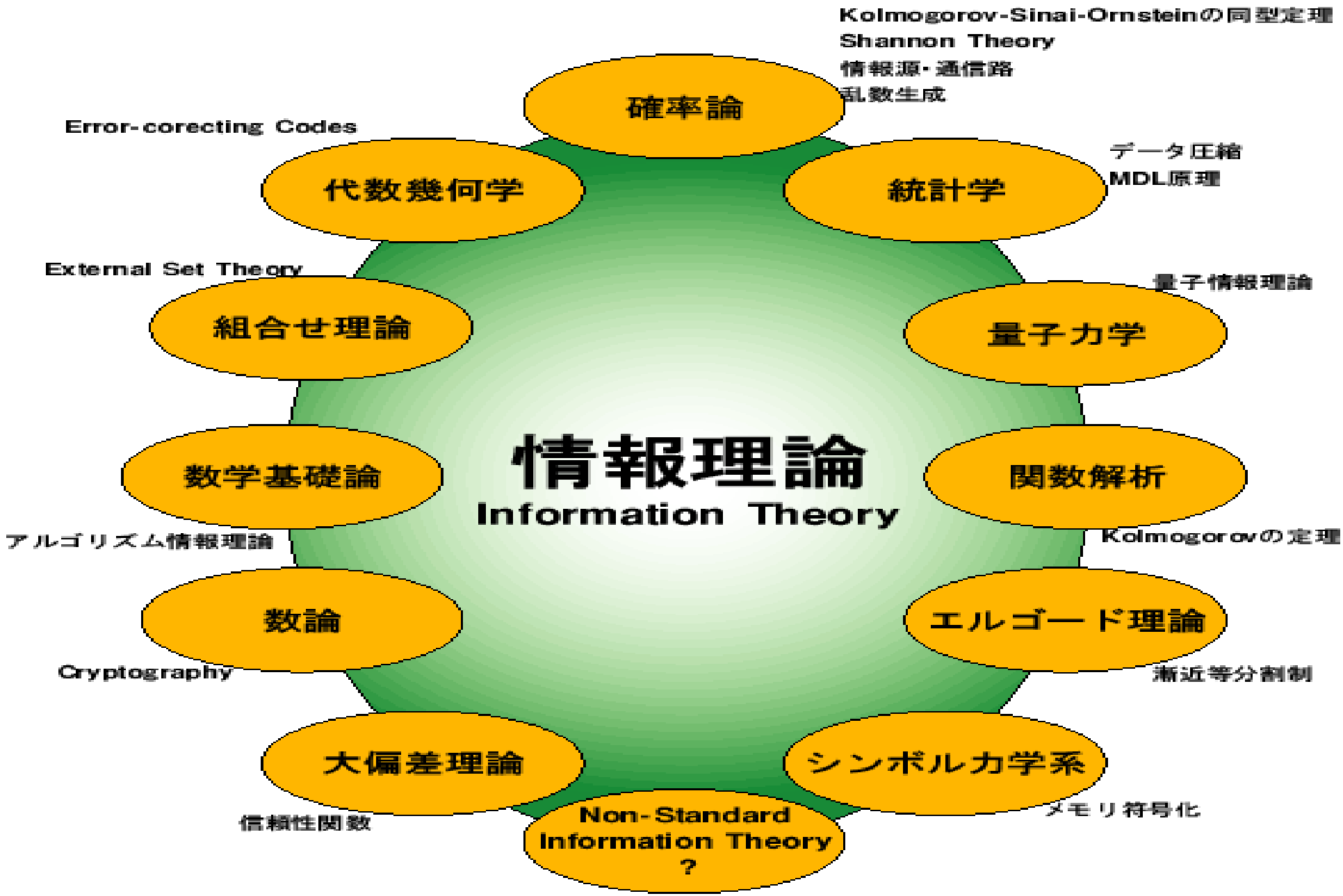
●望まれる研究者像
情報理論の素質を持った通信理論家



- いま現在，世界では，
  通信理論家が今まで蓄積された
  情報理論の成果を取り入れ，
  さらにそれを越えようとしている

8. 科学的体係としての情報理論

科学理論としての情報理論



9. 情報スペクトル理論

• Motivation

• 1980 ~ 1990 年頃　多端子 情報理論を研究
（データ圧縮と仮説検定）

⇒ 締切が来ると，そこそこの論文は書ける．
しかし 新鮮な感動がない．

⇒ このままでは終りたくない

自費でも行くという強い思い

⇒ 米国（Princeton大，Cornell大）で在外研究

- Thinking, Eating, Sleeping の毎日

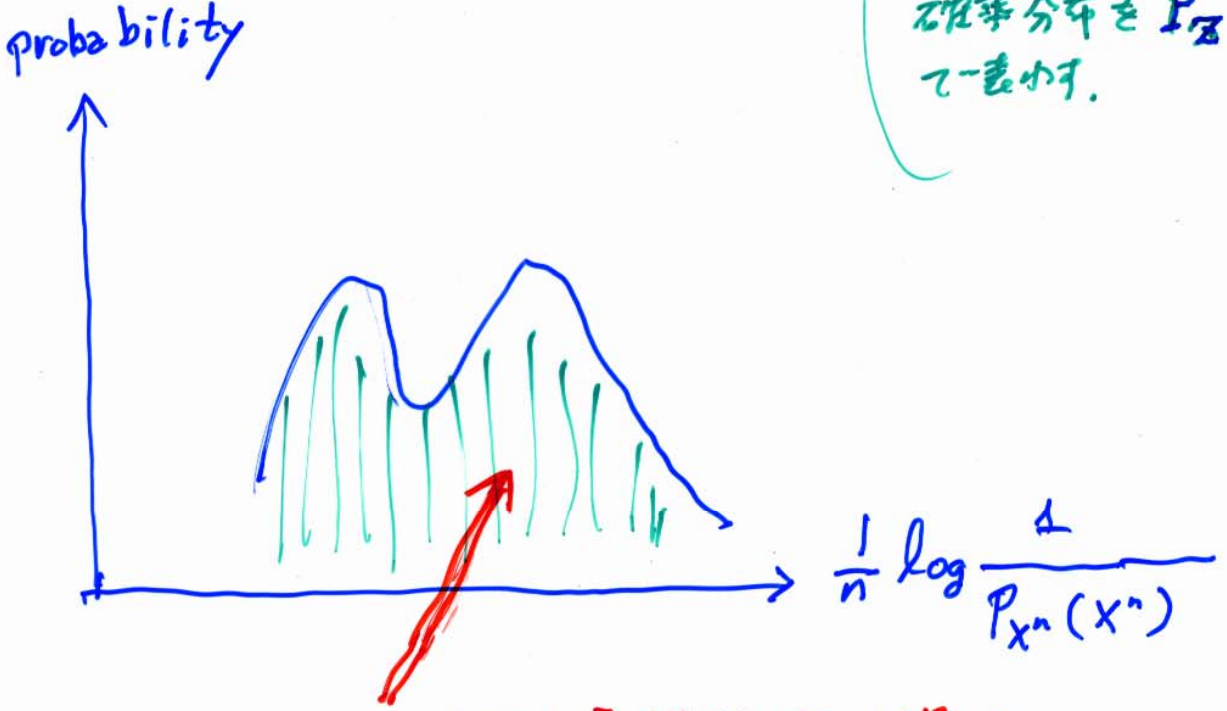
⇒ 生涯はじめての深い集中

⇒ 情報スペクトル理論への道

ブロック長

● 一般情報源 $\underset{\sim}{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$

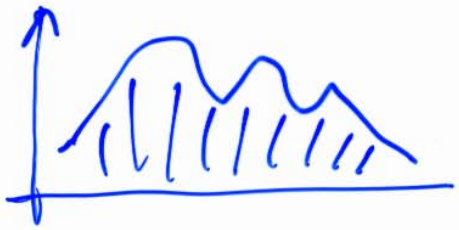
(確率変数 Z の確率分布を P_Z で表す.)



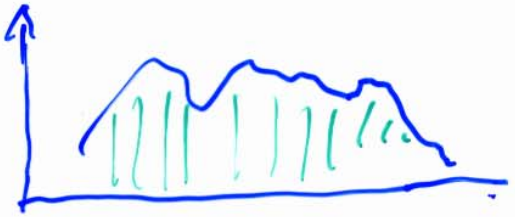
この分布を「情報源 X^n の情報スペクトル」と呼ぶ

• Example 1.

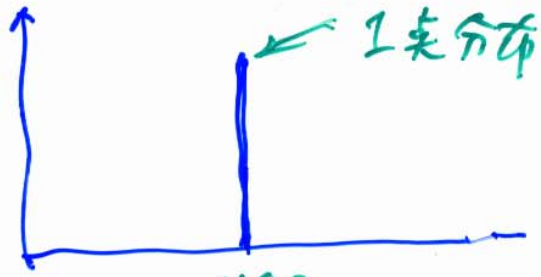
情報スペクトル



⇓ ブロック長 $n \to \infty$



情報源 X が定常エルゴードであれば → ⇓ ブロック長 $n \to \infty$



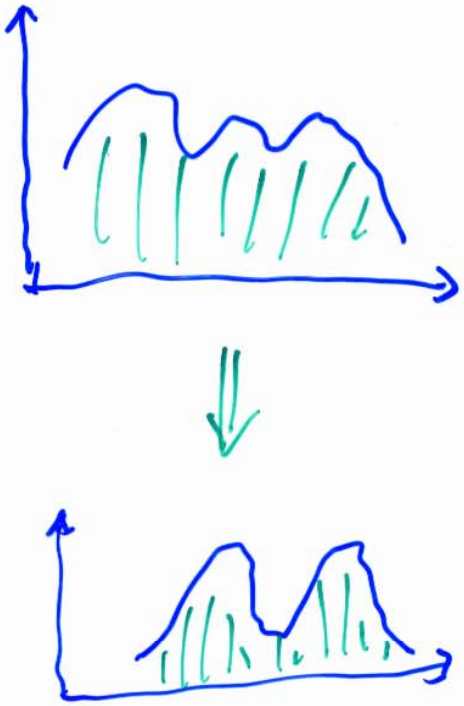
• Example 2

（混合情報源）

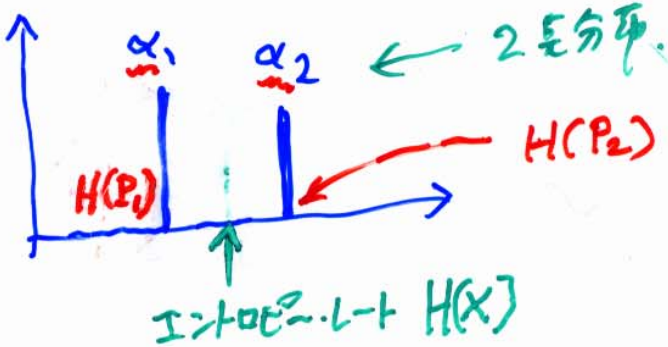
$$P_{X^n}(x^n) = \alpha_1 P_{X_1^n}(x^n) + \alpha_2 P_{X_2^n}(x^n)$$

$P_{X_1^n}$: i.i.d. $\sim P_1$

$P_{X_2^n}$: i.i.d. $\sim P_2$



⇐ このような場合は従来の理論では扱えない!!



(Example 2. のような場合も扱うための新しい道具)

• 情報スペクトル理論の基本的道具

(確率的上極限) $$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} Z_n \equiv \inf\left\{\alpha \mid \lim_{n\to\infty} \Pr\{Z_n > \alpha\} = 0\right\}$$

(確率的下極限) $$\text{p-}\liminf_{n\to\infty} Z_n \equiv \sup\left\{\beta \mid \lim_{n\to\infty} \Pr\{Z_n < \beta\} = 0\right\}$$

$\{Z_n\}$ は任意の実数値変数

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty}(Z_n + V_n) \le \text{p-}\limsup_{n\to\infty} Z_n + \text{p-}\limsup_{n\to\infty} V_n$$

$$\text{p-}\liminf_{n\to\infty}(Z_n + V_n) \ge \text{p-}\liminf_{n\to\infty} Z_n + \text{p-}\liminf_{n\to\infty} V_n$$

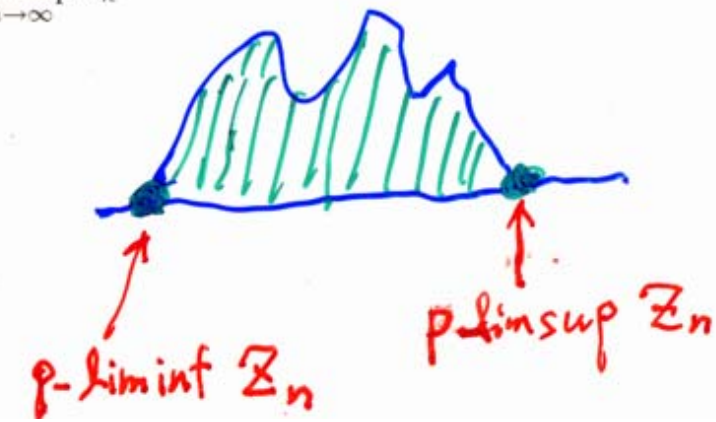
$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty}(Z_n + V_n) \ge \text{p-}\liminf_{n\to\infty} Z_n + \text{p-}\limsup_{n\to\infty} V_n$$

$$\text{p-}\liminf_{n\to\infty}(Z_n + V_n) \le \text{p-}\liminf_{n\to\infty} Z_n + \text{p-}\limsup_{n\to\infty} V_n$$

$$\text{p-}\liminf_{n\to\infty} Z_n \le \text{p-}\limsup_{n\to\infty} Z_n$$

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty}(-Z_n) = -\text{p-}\liminf_{n\to\infty} Z_n$$

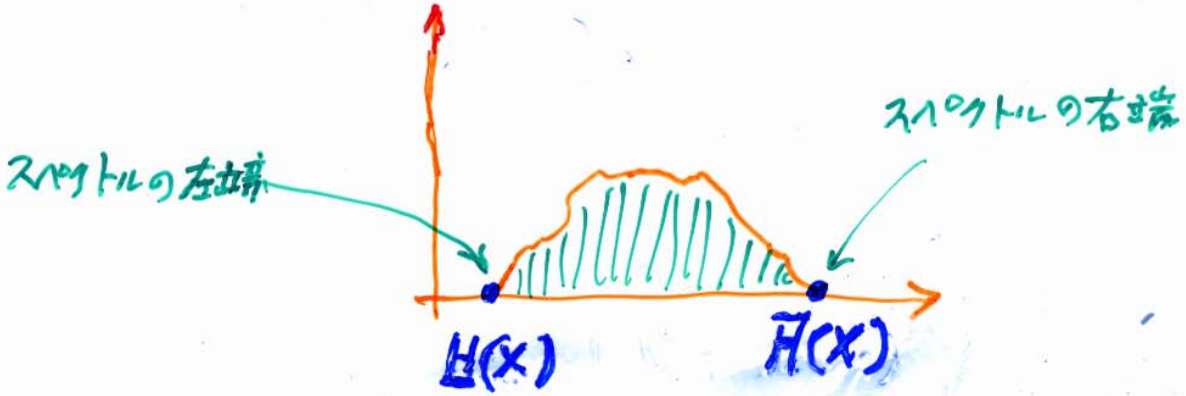
• 確率論には表われない概念



- 情報源 $\underset{\sim}{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\overline{H}(\underset{\sim}{X}) = \underline{p\text{-}\limsup} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)},$$

$$\underline{H}(\underset{\sim}{X}) = \underline{p\text{-}\liminf} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)}$$



- これらの確率的上・下限を用いて得られる定理：

定理 1（最適符号化レート）: $R_f(\underline{X}) = \overline{H}(\underline{X})$ coding rate

定理 2（最適乱数化レート）: $S_t^*(\underline{X}) = \underline{H}(\underline{X})$ Intric Randomness

定理 3（最適分布近似レート）: $R_r(\underline{X}) = \overline{H}(\underline{X})$ resolvability

- $\overline{H}(\underline{X}) = \underline{H}(\underline{X})$ なる情報源 $\underline{X}$ は
  強遠性を持つといわれる（定常エルゴードなど）.
- このときには，上の式の右辺はすべて一致する.
- 強逆性は，（任意のレート $R < \overline{H}(\underline{X})$ に対して
  誤り符号率が $\varepsilon_n \to 1$ となること）
  と等価である.

Question : 情報源 $\underline{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ をデータの圧縮限界 $R_f(\underline{X})$ まで圧縮したときの符号器 φ_n の出力 $Y^n = \varphi_n(X^n)$ は，ほぼ完全にランダムであるか!?

定理 4 (Folklore Theorem) ←[伝承問題] 2005年

上記の符号器出力 $Y^n = \varphi_n(X^n)$ がほぼ完全にランダムであるのは，情報源 $\underline{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ が強遊性をもつとき，そしてその時に限る．

注： $\frac{1}{n} D(Y^n \| U_{M_n}) \to 0$ なるとき，Y^n はほぼ完全にランダムであるという．

- D：ダイバージェンス
- U_{M_n}：サイズが M_n の一様分布変数 ($\frac{1}{n} \log M_n \to$ 収束)

定理5 (Invaliance Theorem)

一般情報源 $\underline{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ に対する符号器と復号器を
それぞれ φ_n, ψ_n として, $\hat{X}^n = \varphi_n(X^n)$, $\tilde{X}^n = \psi_n(\varphi_n(X^n))$ とおく.
すると, 誤り確率 $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であれば,
X^n, $\hat{X}^n$, $\tilde{X}^n$ の情報スペクトルは 漸近的に
すべて一致する:

$L(\cdot,\cdot)$ は Levy 距離

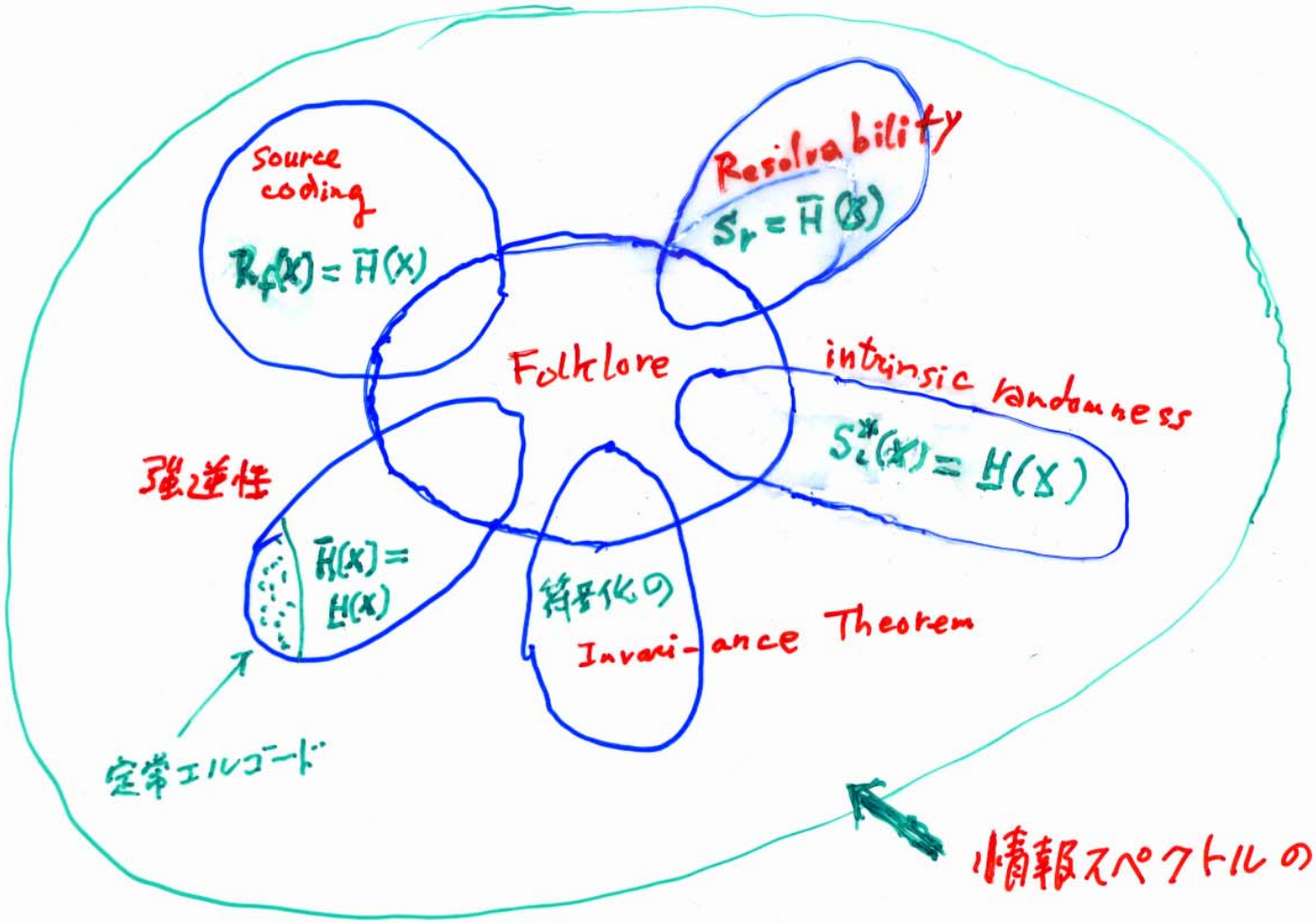
$$\lim_{n\to\infty} L\left(\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)},\ \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n}(\hat{X}^n)}\right) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} L\left(\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)},\ \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\tilde{X}^n}(\tilde{X}^n)}\right) = 0$$

- 情報スペクトルは符号化, 復号化の過程で不変に保たれる.



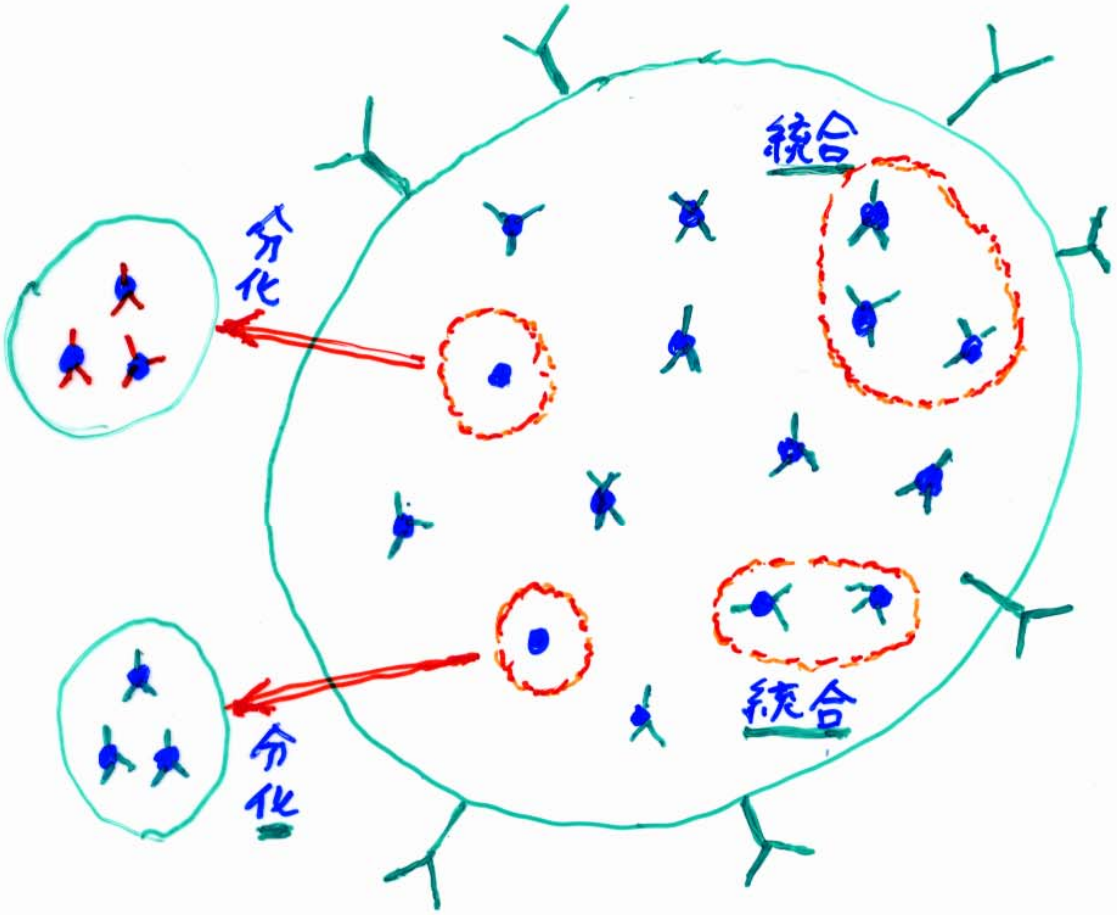
• Folklore と 情報スペクトルの世界



10. 学問的進化とは何か

学問的進化の特質

- 論理の力を原動力として
  統合と分化を繰り返していく



- 全体の中での各要素の
  論理的位置づけ
- 要素間の論理的つながり
- 各要素の論理的深さ

Example 3: Newton 力学

質点，質量，加速度
運動量，力，エネルギー
← 基本概念

分化 ↙

統合 ↘

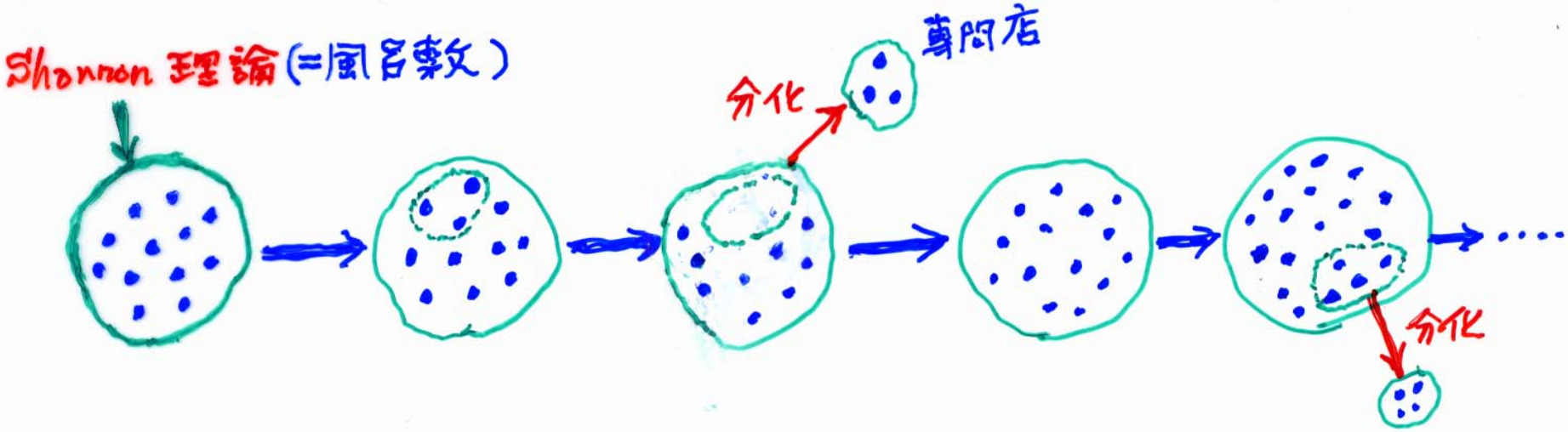
機械工学
材料力学
流体力学
航空力学
……

解析力学
（ラグランジュアン，
ハミルトニアン）
統合 ⇒ 相対性理論

統合 ↓

量子力学
(Schrödinger)

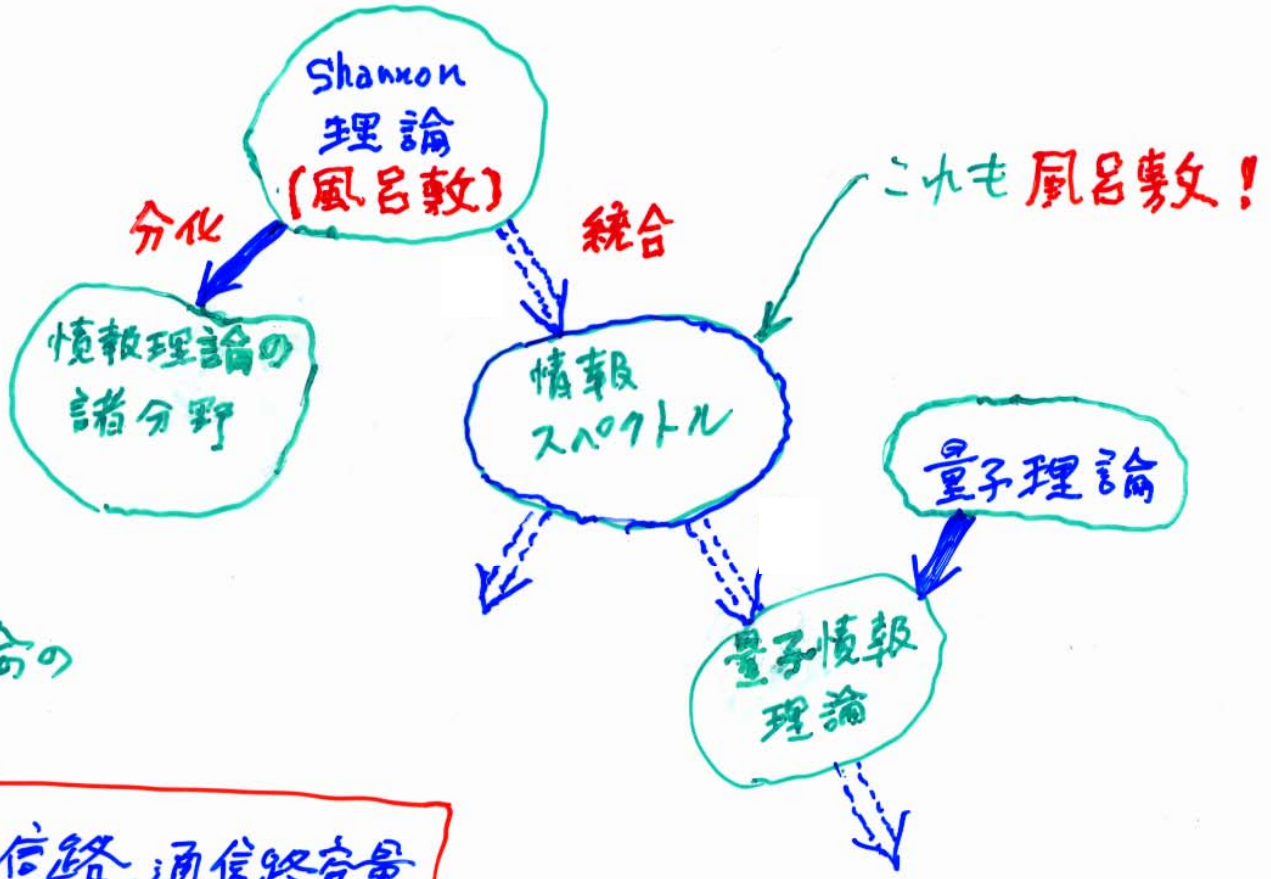
情報理論の進化 — 統合と分化



分化した分野:

- 通信路符号化
- 乱数生成
- MDL原理
- マルチユーザ通信
- 符号化変調
- メモリ符号化
- 暗号理論
- 多端子情報理論
- アルゴリズム情報理論
- ユニバーサル符号化
- ベクトル量子化
- データ圧縮
- 誤り訂正符号
- ……

情報理論に統合はあるのか？



Shannon 理論の
基本的概念

情報源，通信路，通信路容量
符号器，復号器，誤り確率，レート

11. 大風呂敷の結び

情報理論とかけて

スペクトルととく

⇓

その心は

ファウスト

「永遠に真理なるもの、
我を惹きて行かしむ」

12. 定年後の課題



- PowerPointを習得すること!!